VERMITTELNDE AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

TEIL 3: FORMELN UND ÜBERSICHTEN

AUTOR: R. LEHMANN, HTW DRESDEN, STAND: 16. JULI 2020

Wiederholungsmessungen (Messreihen)

Genauigkeit der Beob.	gleich	ungleich
Beobachtungen	$L_1, L_2, \dots, L_n$	
Gewichte	$p_i = 1$	$p_i = \sigma_0^2/\sigma_{L_i}^2$
ausgeglichene Beobachtungen	$\hat{L} = \frac{1}{n}\sum L_i$	$\hat{L} = \frac{\sum p_i L_i}{\sum p_j}$
A priori Standardabweichung der ausgeglichenen Beobachtungen (wenn σ_0 bekannt ist)	$\sigma_{\hat{L}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$	$\sigma_{\hat{L}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum_j p_j}}$
A posteriori Standardabweichung der Gewichtseinheit	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum (L_i - \hat{L})^2}{n-1}}$	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum p_i (L_i - \hat{L})^2}{n-1}}$
A posteriori Standardabw. der ursprüngl. Beobachtungen	$\hat{\sigma}_{L_i} = \hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_{L_i} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{p_i}}$
A posteriori Standardabw. der ausgegl. Beobachtung	$\hat{\sigma}_{\hat{L}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{L}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{\sum p_j}}$
Redundanzanteile	$r_i = 1 - \frac{1}{n}$	$r_i = 1 - \frac{p_i}{\sum p_j}$

Messungen mit einer Summenbedingung

Genauigkeit der Beobachtungen	gleich	ungleich
Beobachtungen	$L_1, L_2, \dots, L_n$	
Widerspruch	$w = L_1 + L_2 + \cdots + L_n - s$	
Gewichte	$p_i = 1$	$p_i = \sigma_0^2/\sigma_{L_i}^2$
ausgeglichene Beobachtungen	$\hat{L}_i = L_i - \frac{w}{n}$	$\hat{L}_i = L_i - \frac{wq}{p_i}$
A priori Standardabweichung der ausgeglichenen Beobachtungen (wenn σ_0 bekannt ist)	$\sigma_{\hat{L}_i} = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$	$\sigma_{\hat{L}_i} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_i} - \frac{q}{p_i^2}}$
A posteriori Standardabw.	Berechnung nicht sinnvoll (Redundanz zu gering)	
Redundanzanteile	$r_i = 1/n$	$r_i = q/p_i$

Doppelmessungen mit und ohne systematische Differenz $\tilde{d}$

	Genauigkeit der Beobachtungen	alle gleich	nur paarweise gleich
	Beobachtungen	$L'_1, L''_1, L'_2, L''_2, \dots, L'_n, L''_n$	
	Differenzen	$d_i = L''_i - L'_i$	
	Gewichte	$p_i = 1$	$p_i = \sigma_0^2/\sigma_{L_i}^2$
	ausgeglichene Beobachtungen	$\hat{L}_i = (L''_i + L'_i)/2$	
$\tilde{d} \neq 0$	ausgeglichene Differenz	$\hat{d} = \frac{1}{n}\sum d_i$	$\hat{d} = \frac{\sum p_i d_i}{\sum p_j}$
	A posteriori Standardabweichungen der Gewichtseinheit	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \hat{d})^2}{2(n-1)}}$	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum p_i (d_i - \hat{d})^2}{2(n-1)}}$
	A priori Standardabweichungen der ausgeglichenen Differenz	$\sigma_{\hat{d}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\sigma_0$	$\sigma_{\hat{d}} = \sqrt{\frac{2}{\sum p_j}}\sigma_0$
	A posteriori Standardabweichungen der ausgeglichenen Differenz	$\hat{\sigma}_{\hat{d}} = \sqrt{\frac{2}{n}}\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_{\hat{d}} = \sqrt{\frac{2}{\sum p_j}}\hat{\sigma}_0$
$\tilde{d} = 0$	A posteriori Standardabweichungen der Gewichtseinheit	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{2n}}$	$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum p_i d_i^2}{2n}}$
	A posteriori Standardabweichungen der ursprünglichen Beobachtungen	$\hat{\sigma}_{L'_i} = \hat{\sigma}_{L''_i} = \hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_{L'_i} = \hat{\sigma}_{L''_i} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{p_i}}$
	Standardabweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen	$\sigma_{\hat{L}_i} = \frac{\sigma_{L_i}}{\sqrt{2}}$ oder $\hat{\sigma}_{\hat{L}_i} = \frac{\hat{\sigma}_{L_i}}{\sqrt{2}}$	

Doppelmessungen ohne systematische Differenz $\tilde{d}$

Zulässige Differenz: $d_{zul,i} = D_{zul} \cdot \sqrt{2}\sigma_{L_i}$ (überprüft mit $\alpha = 5\%$ die Hypothese $H_0 : \tilde{d} = 0$)

n	1	2	3	5	7	10	15	20	30	50	70	100	150	200
D_{zul}	1,96	2,24	2,39	2,58	2,69	2,81	2,94	3,02	3,14	3,29	3,38	3,48	3,59	3,7

Abkürzung: $q = \left(\sum \frac{1}{p_j}\right)^{-1}$

Vermittelnde Ausgleichungsrechnung

gemessene Beobachtungen (oder andere mit zufälligen Abweichungen behaftete Größen)	$\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_n)^T$
Parameter des Ausgleichungsmodells	$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_u)^T$
Verbesserungen (Residuen) der Beobacht.	$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$
Beobachtungsgleichungen (Funkt. Modell)	$\tilde{L}_i = \varphi_i(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_u)$
Ursprüngliche Verbesserungsgleichungen	$L_i + v_i = \varphi_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_u)$
a priori Standardabw. der ursprünglichen Beob.	$\sigma_{L_1}, \sigma_{L_2}, \ldots, \sigma_{L_n}$
a priori Varianzfaktor, a priori Standardabw. der Gewichtseinheit	σ_0^2, σ_0
Gewichte (Stochastisches Modell)	$p_i = \sigma_0^2 / \sigma_{L_i}^2$
Gewichtsmatrix (*n×n*), für unkorrelierte Beobachtungen = Diagonalmatrix	$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$
Näherungswerte für die Parameter	$\boldsymbol{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \ldots, X_u^0)^T$
Näherungswerte für die Beobachtungen	$L_i^0 = \varphi_i(X_1^0, X_2^0, \ldots, X_u^0)$
gekürzte Beobachtungen	$l_i = L_i - L_i^0$ $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)^T$
Designmatrixelemente	$a_{ij} = \partial\varphi_i / \partial X_j^0$
Designmatrix (***A***-Matrix) (*n×u*)	$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nu} \end{pmatrix}$
Normalgleichungsmatrix (*u×u*)	$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}$
Normalgleichungsvektor (*u×1*)	$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{l}$
Lösung der Normalgleichungen (*u×1*)	$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{n}$
Vektor der ausgeglichenen Parameter (*u×1*)	$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}^0 + \hat{\boldsymbol{x}}$
Vektor der Verbesserungen (*n×1*)	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}$
Vektor der ausgegl. Beobachtungen (*n×1*)	$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$
Schlussprobe (Ausgleichungsprobe)	$\hat{L}_i = \varphi_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_u)$?
A posteriori Varianzfaktor A posteriori Standardabw. der Gewichtseinheit	$\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n-u}, \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2}$
Globaltest (falls σ_0 bekannt)	$\hat{\sigma}_0 \approx \sigma_0$?

Bereiche der Indizes $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, u,\ k = 1, \ldots, m$

Funktionen von ausgeglichenen Parametern	$f_k = \psi_{X,k}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_u)$
oder von ausgeglichenen Beobachtungen	$f_k = \psi_{L,k}(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \ldots, \hat{L}_n)$
Funktionalmatrixelemente	$f_{kj} = \partial\psi_{X,k} / \partial\hat{X}_j$ oder $f_{ki} = \partial\psi_{L,k} / \partial\hat{L}_i$
Funktionalmatrix (***F***-Matrix) (*m×u*) (Funktionen von ausgegl. Beobachtungen: $\boldsymbol{F_L}$ mit n statt u)	$\boldsymbol{F}_X = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mu} \end{pmatrix}$

Kofaktormatrizen ***Q***, a posteriori Kovarianzmatrizen $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$

der ursprünglichen Beobachtungen (*n×n*)	$\boldsymbol{Q}_L = \boldsymbol{P}^{-1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_L = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_L$
der ausgeglichenen Parameter (*u×u*)	$\boldsymbol{Q}_{\hat{X}} = \boldsymbol{N}^{-1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_{\hat{X}}$
der ausgeglichenen Beobachtungen (*n×n*)	$\boldsymbol{Q}_{\hat{L}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_{\hat{L}}$
der Verbesserungen (*n×n*)	$\boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{Q}_L - \boldsymbol{Q}_{\hat{L}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_v = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_v$
der Funktionen v. ausgegl. Param. (*m×m*)	$\boldsymbol{Q}_f = \boldsymbol{F}_X \boldsymbol{Q}_{\hat{X}} \boldsymbol{F}_X^T, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_f = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_f$
der Funktionen v. ausgegl. Beob. (*m×m*)	$\boldsymbol{Q}_f = \boldsymbol{F}_L \boldsymbol{Q}_{\hat{L}} \boldsymbol{F}_L^T, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_f = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_f$

A posteriori Standardabweichungen

der ursprünglichen Beobachtungen	$\hat{\sigma}_{L_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{L_i}} = \hat{\sigma}_0 / \sqrt{p_i}$
der ausgeglichenen Parameter	$\hat{\sigma}_{\hat{X}_j} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{\hat{X}_i}}$
der ausgeglichenen Beobachtungen	$\hat{\sigma}_{\hat{L}_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{\hat{L}_i}}$
der Verbesserungen	$\hat{\sigma}_{v_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{v_i}}$
der Funktionen f_k	$\hat{\sigma}_{f_k} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{f_k}}$

(Die a priori Kovarianzmatrizen ***Σ*** bzw. Standardabweichungen σ erhält man, wenn man in den Formeln oben überall die Dächer über ***Σ*** und σ weglässt. Die *q*-Werte unter den Wurzeln sind die Hauptdiagonalelemente der entsprechenden ***Q***-Matrizen.)

Redundanzmatrix (*n,n*)	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_{\hat{L}} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}_v \boldsymbol{P}$
Redundanzanteile (Hauptdiagonale von ***R***)	$r_i = 1 - q_{\hat{L}_i} / p_i$
Gesamtredundanz (Probe)	$\sum_{i=1}^n r_i = r = n - u$?
Normierte Verbesserungen NV_i (Studentisierte Verbess. SV_i mit $\hat{\sigma}$ statt σ)	$NV_i = \dfrac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \dfrac{v_i}{\sigma_{L_i}\sqrt{r_i}} = \dfrac{v_i}{\sigma_0}\sqrt{\dfrac{p_i}{r_i}}$

Beobachtungsgleichungen und linearisierte Verbesserungsgleichungen

für Horizontal-Richtungsbeobachtungen r_{AE}

$$\tilde{r}_{AE} = \arctan\left(\frac{\tilde{Y}_E - \tilde{Y}_A}{\tilde{X}_E - \tilde{X}_A}\right) - \tilde{o}_A$$

$$l_i + v_i = \rho \frac{X_E^0 - X_A^0}{(e_{AE}^0)^2}\widehat{dy}_E - \rho \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{(e_{AE}^0)^2}\widehat{dx}_E - \rho \frac{X_E^0 - X_A^0}{(e_{AE}^0)^2}\widehat{dy}_A + \rho \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{(e_{AE}^0)^2}\widehat{dx}_A - \widehat{do}_A = \rho \frac{\cos t_{AE}^0}{e_{AE}^0}\widehat{dy}_E - \rho \frac{\sin t_{AE}^0}{e_{AE}^0}\widehat{dx}_E - \rho \frac{\cos t_{AE}^0}{e_{AE}^0}\widehat{dy}_A + \rho \frac{\sin t_{AE}^0}{e_{AE}^0}\widehat{dx}_A - \widehat{do}_A$$

für Horizontal-Streckenbeobachtungen e_{AE}

$$\tilde{e}_{AE} = \frac{1}{\tilde{m}}\sqrt{\left(\tilde{Y}_E - \tilde{Y}_A\right)^2 + \left(\tilde{X}_E - \tilde{X}_A\right)^2}$$

$$l_i + v_i = \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{m^0 e_{AE}^0}\widehat{dy}_E + \frac{X_E^0 - X_A^0}{m^0 e_{AE}^0}\widehat{dx}_E - \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{m^0 e_{AE}^0}\widehat{dy}_A - \frac{X_E^0 - X_A^0}{m^0 e_{AE}^0}\widehat{dx}_A - \frac{e_{AE}^0}{(m^0)^2}\widehat{dm} = \frac{\sin t_{AE}^0}{m^0}\widehat{dy}_E + \frac{\cos t_{AE}^0}{m^0}\widehat{dx}_E - \frac{\sin t_{AE}^0}{m^0}\widehat{dy}_A - \frac{\cos t_{AE}^0}{m^0}\widehat{dx}_A - \frac{e_{AE}^0}{(m^0)^2}\widehat{dm}$$

Erläuterungen:

$\rho = 200gon/\pi$, falls Winkel in Gon sind

Parametervektor $\boldsymbol{X} = (\dots, Y_A, X_A, o_A, \dots, Y_E, X_E, o_E, \dots, m)^T$ oder andere Reihenfolge

gekürzter Parametervektor $\boldsymbol{x} = (\dots, dy_A, dx_A, do_A, \dots, dy_E, dx_E, do_E, \dots, dm)^T$ oder andere Reihenfolge

Wenn ein fester Maßstab (z.B. $m = 1{,}000000$) verwendet werden soll, entfällt Maßstabsparameter m und es wird $dm = 0, m^0 = m$.

Wenn A ein Festpunkt ist, entfallen Parameter Y_A, X_A und es wird $dy_A = dx_A = 0, X_A^0 = X_A, Y_A^0 = Y_A$.

Wenn E ein Festpunkt ist, entfallen Parameter Y_E, X_E und es wird $dy_E = dx_E = 0, X_E^0 = X_E, Y_E^0 = Y_E$.

Wenn auf Punkt A keine Richtungen gemessen wurden, entfällt Orientierungsparameter o_A und es wird $do_A = 0$

t_{AE}^0, e_{AE}^0 sind die aus Näherungskoordinaten berechneten Richtungswinkel und Strecken.

o_A^0 ist der Näherungsorientierungsparameter auf A und wird durch Stationsabriss auf A mit Näherungskoordinaten für alle Neupunkte berechnet.

für ebene Transformationen $(y, x) \rightarrow (Y, X)$

Wenn möglich, die Transformationsrichtung so wählen, dass nur (Y, X) die Beobachtungen sind:

3-Parameter	Helmert (konform)	Affin
$\tilde{X} = \tilde{X}_0 - \sin\varepsilon \cdot \tilde{y}_i + \cos\varepsilon \cdot \tilde{x}_i$	$\tilde{X} = \tilde{X}_0 - o \cdot \tilde{y}_i + a \cdot \tilde{x}_i$	$\tilde{X} = \tilde{X}_0 - a_2 \cdot \tilde{y}_i + a_1 \cdot \tilde{x}_i$
$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \cos\varepsilon \cdot \tilde{y}_i + \sin\varepsilon \cdot \tilde{x}_i$	$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + a \cdot \tilde{y}_i + o \cdot \tilde{x}_i$	$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + a_3 \cdot \tilde{y}_i + a_4 \cdot \tilde{x}_i$
$\boldsymbol{X} = (X_0, Y_0, \varepsilon)^T$	$\boldsymbol{X} = (X_0, Y_0, o, a)^T$	$\boldsymbol{X} = (X_0, Y_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$

Statistische Formeln

a posteriori Standardellipse (Helmertsche Fehlerellipse)

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}\\ \hat{B}\end{matrix}\right\} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{2}}\sqrt{q_x + q_y \pm \sqrt{\left(q_x - q_y\right)^2 + 4q_{xy}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 \pm \sqrt{\left(\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2\right)^2 + 4\hat{\sigma}_{xy}^2}},\ \ \theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2 \cdot q_{xy}}{q_x - q_y}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2 \cdot \hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2}\right)$$

a priori Standardellipse: A, B, σ ohne Dach

A, B sind die Halbachsen, θ ist der Richtungswinkel der großen Halbachse für den Punkt mit den Lagekoordinaten x, y

a posteriori Lagepunktstandardabweichung

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2} = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2} = \hat{\sigma}_0\sqrt{q_x + q_y}$$

a priori Lagepunktstandardabweichung: A, B, σ ohne Dach

n unkorrelierte Beobachtungen $L_1, L_2, \ldots, L_n$

u Parameter $X_1, X_2, \ldots, X_u$ = kleinstmögliche Menge von Größen, mit der man die wahren Werte aller Beobachtungen berechnen könnte (auch wenn diese nicht alle gesucht sind)

n a priori Standardabweichungen der gem. Beob. $\sigma_{L_1}, \sigma_{L_2}, \ldots, \sigma_{L_n}$ **absolut** angebbar, wenigstens grob auf 1..2 Ziffern

Genauigkeitsmaße nur **relativ** angebbar, z.B. in der Form $\sigma_{L_i}/\sigma_{L_j}$

Beobachtungsgleichungen (funktionales Modell) $\tilde{L}_i = \varphi_i(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_u)$

A priori Standardabweichung der Gewichtseinheit σ_0 beliebig wählen, z.B. $\sigma_0 \coloneqq \sigma_{L_1}$ oder wenn Beobachtungen verschiedene Einheiten haben, dann besser $\sigma_0 \coloneqq 1$

ein Gewicht p_i beliebig wählen, die anderen berechnen: $p_j = p_i \sigma_{L_i}^2 / \sigma_{L_j}^2$

Ursprüngliche Verbesserungsgleichungen $L_i + v_i = \varphi_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_u)$

Gesamtredundanz $r=n-u>0$? Sonst keine Ausgleichungsaufgabe!

alle Gewichte $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_{L_i}^2$

Gewichtsmatrix $\boldsymbol{P}$ (stochastisches Modell) = $(n \times n)$-Diagonalmatrix mit p_i füllen Reihenfolge wie Beobachtungen in Vektor $\boldsymbol{L}$

Mindestens ein φ_i **nichtlinear**: Näherungswerte $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_u^0$ für alle Parameter finden, z.B. durch Lösen von u geeigneten ursprünglichen Verbesserungsgleichungen

Alle φ_i **linear**: Näherungsparameter $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_u^0$, beliebig, aber zur Vereinfachung in der Nähe der gesuchten Parameter

gekürzte Beobachtungen $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L^0}$ mit $L_i^0 = \varphi_i(X_1^0, X_2^0, \ldots, X_u^0)$

Normalgleichungen $\boldsymbol{N\hat{x}} = \boldsymbol{n}$ mit $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA}$ und $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Pl}$

Designmatrix $\boldsymbol{A} = (n \times u)$-Matrix mit Elementen $a_{ij} = \partial\varphi_i / \partial X_j^0$ aufstellen. Index 0 bedeutet ggf. Näherungsparameter einsetzen

Linearisierte Verbesserungsgleichungen $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A\hat{x}}$ so nicht lösbar, da sowohl die gekürzten Parameter $x_i = X_i - X_i^0$ als auch die Verbesserungen v_i unbekannt sind.

Zusatzbedingung $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{Pv} = \mathrm{Min!}$ (Methode der kleinsten Quadrate)

Lösung der Normalgleichungen $\boldsymbol{\hat{x}} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{n}$

Ausgeglichene Parameter $\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}^0 + \hat{\boldsymbol{x}}$

Schlussprobe: Einsetzen der ausgeglichenen Größen in die ursprünglichen Verbesserungsgleichungen:
$$\hat{L}_i = \varphi_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u)$$
ausreichend erfüllt? Die häufigsten Irrtümer deckt diese Probe **nicht** auf!

Funktionen von ausgeglichenen Parametern $f_k = \psi_{X,k}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u)$ oder Beobachtungen $f_k = \psi_{L,k}(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n)$ (falls solche gesucht sind)

Verbesserungen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}$

Ausgeglichene Beobachtungen $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v}$

Schlussprobe nicht erfüllt und kein Rechenfehler und mindestens ein $\boldsymbol{\varphi_i}$ nichtlinear→ Starte Ausgleichung mit ausgeglichenen Parametern als neue Näherungswerte

Funktionalmatrix $\boldsymbol{F_X}$ oder $\boldsymbol{F_L}$ mit Elementen
$$f_{kj} = \frac{\partial \psi_{X,k}}{\partial \hat{X}_j} \text{ oder } f_{ki} = \frac{\partial \psi_{L,k}}{\partial \hat{L}_i}$$
aufstellen. Reihenfolge der Parameter oder Beochtungen beibehalten!

A posteriori Standardabweichung der Gewichtseinheit
$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}}{n-u}}$$

Globaltest: $\hat{\sigma}_0 \approx \sigma_0$? (falls σ_0 bekannt) Sonst ist ein Modellfehler wahrscheinlich. Faustregel: $\hat{\sigma}_0/\sigma_0$ <0,7 oder >1,3 ist kritisch!

A posteriori Standardabweichung der gemessenen Beobachtungen
$$\hat{\sigma}_{Li} = \hat{\sigma}_0/\sqrt{p_i}$$

Normierte Verbesserungen
$$NV_i = \frac{v_i}{\sigma_{Li}\sqrt{r_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0}\sqrt{\frac{p_i}{r_i}}$$
Faustregel: $|NV_i|$>3 ist kritisch!

A posteriori Standardabweichung der Funkt. f_k:
$\hat{\sigma}_{f_k} = \hat{\sigma}_0\sqrt{q_{f_k}}$
q_{f_k} ist das k-te Diagonalelement der Kofaktormatrix
$\boldsymbol{Q}_f = \boldsymbol{F}_X\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}\boldsymbol{F}_X^T$ oder
$\boldsymbol{Q}_f = \boldsymbol{F}_L\boldsymbol{Q}_{\hat{L}}\boldsymbol{F}_L^T$

A posteriori Standardabweichung der ausgeglichenen Parameter
$$\hat{\sigma}_{\hat{X}j} = \hat{\sigma}_0\sqrt{q_{\hat{X}_j}}$$
$q_{\hat{X}_j}$ ist das j-te Diagonalelement der Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{X}} = \boldsymbol{N}^{-1}$

A posteriori Standardabweichung der ausgeglichenen Beobachtungen
$\hat{\sigma}_{\hat{L}i} = \hat{\sigma}_0\sqrt{q_{\hat{L}i}}$
$q_{\hat{L}i}$ ist das i-te Diagonalelement der Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{L}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T$

Redundanzanteile r_i = Diagonalelemente der Redundanzmatrix
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_{\hat{L}}\boldsymbol{P}$$
Probe: $\sum r_i = r = n - u$
Einfluss auf die Verbesserung $EV_i = r_i \cdot 100\%$
Faustregel: EV_i<10% ist kritisch!