

VERMITTELNDE AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

TEIL 1: GRUNDLAGEN

AUTOR: R. LEHMANN, HTW DRESDEN, STAND: 16. JULI 2020

INHALT

0	Vorwort.....	4
1	Das funktionale Ausgleichungsmodell	5
1.1	Messwerte und Beobachtungen.....	5
1.2	Parameter und Parametrisierung.....	6
1.3	Gemessene Werte, wahre Werte und Schätzwerte	7
1.4	Beobachtungsgleichungen	8
1.5	Ursprüngliche Verbesserungsgleichungen	10
1.6	Linearisierte Verbesserungsgleichungen	11
2	Das stochastische Ausgleichungsmodell	17
2.1	Alle Beobachtungen sind unkorreliert und haben bekannte Standardabweichungen	17
2.2	Alle Beobachtungen sind unkorreliert und alle relativen Genauigkeiten sind bekannt, absolute jedoch nicht.....	18
2.3	Alle Beobachtungen sind unkorreliert und nur einige relative Genauigkeiten sind bekannt	19
2.4	Alle Beobachtungen sind korreliert und die Kofaktormatrix ist bekannt	19
3	Lösung des linearisierten Ausgleichungsproblems	21
3.1	Schätzprinzipien.....	21
3.2	Berechnung der ausgeglichenen Größen.....	22
3.3	Schlussprobe und weitere Proben.....	23
3.4	Funktionen ausgeglichener Größen.....	25
4	Genauigkeitsberechnung.....	27
4.1	A priori Genauigkeitsmaße und a posteriori Genauigkeitsschätzungen.....	27
4.2	Kofaktormatrizen.....	27
4.3	A posteriori Varianzfaktor	30

4.4	Varianzen, Kovarianzen, Standardabweichungen	31
4.5	Fehlerellipsen und Lagestandardabweichung	33
5	Zuverlässigkeitsberechnung.....	36
5.1	Was ist Zuverlässigkeit?.....	36
5.2	Gesamtredundanz und Redundanzanteile.....	36
5.3	Globaltest.....	39
5.4	w-Test	41
5.5	τ -Test	42
5.6	Ausgleichung von gemittelten Beobachtungen.....	43
6	Spezielle vermittelnde Ausgleichungsmodelle	45
6.1	Einfache angeschlossene Höhennetze	45
6.2	EDM-Kalibrierung.....	45
6.3	Ausgleichende Funktionen mit fehlerfreien Abszissen	47
6.4	Transformationen mit fehlerfreien Quellsystemkoordinaten.....	48
6.5	Voll angeschlossene Lagenetze	49
7	Allgemeinfall der Ausgleichung.....	52
7.1	Rückführung auf das vermittelnde Ausgleichungsmodell	52
7.2	Ausgleichende Gerade mit fehlerhaften Abszissen	52
7.3	Weitere Anwendungen.....	54
8	Schluss.....	55
	Literatur	56

0 VORWORT

In diesem Manuskript werden die wesentlichen Grundlagen der Ausgleichsrechnung dargestellt. Dabei verzichten wir weitgehend auf mathematische Herleitungen zugunsten der Anschaulichkeit und praktischer Tipps.

Zum Verständnis dieses Manuskriptes sind Grundkenntnisse über die Mathematische und die Geodätische Statistik erforderlich. Bitte studieren Sie zunächst die Manuskripte

- Geodätische Messabweichungen
- Fehlerfortpflanzung
- Wiederholungsmessungen, Doppelmessungen und Messungen mit einer Summenbedingung

von R. Lehmann. Sie finden diese hier:

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=library/entry&ID=Lehmann16>

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=library/entry&ID=Lehmann16a>

Diese Manuskript wird fortgesetzt durch

Teil 2: Beispielaufgaben und Lösungen

Teil 3: Formeln und Übersichten

Außerdem empfehlenswert ist

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=guide/gmm>

Hier wird gezeigt, wie die geodätische Cloud Computing Software IN DUBIO PRO GEO



<http://www.in-dubio-pro-geo.de>

benutzt werden kann, um vermittelnde Ausgleichungen zu berechnen. Die Symbolik von IN DUBIO PRO GEO stimmt mit der Symbolik in diesem Manuskript überein, mit einer Ausnahme: Ausgegliche GröÙen sind dort mit \bar{x} , \bar{l} , $\bar{\sigma}$, ... statt mit \hat{x} , \hat{l} , $\hat{\sigma}$, ... bezeichnet.

R. Lehmann, Juli 2020

1 DAS FUNKTIONALE AUSGLEICHUNGSMODELL

1.1 MESSWERTE UND BEOBACHTUNGEN

Die Lösung eines Ausgleichungsproblems beginnt mit der Analyse der vorliegenden Messwerte. Diese werden in zwei Gruppen unterteilt:

1. Messwerte, deren Messabweichungen störend sein könnten und bestmöglich ausgeglichen werden sollen. Diese Messwerte nennen wir **Beobachtungen**.
2. Messwerte, deren Messabweichungen mit Gewissheit so kleine Beträge besitzen, dass sie vernachlässigt werden können. Diese Messwerte werden als **fehlerfreie Größen** betrachtet.

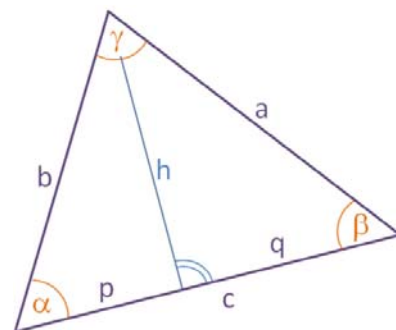
Können alle Messwerte als fehlerfrei betrachtet werden, dann liegt keine Ausgleichungsaufgabe vor. Wenn man mehr Messwerte als nötig oder alle Messwerte als Beobachtungen auffasst, macht man an dieser Stelle nichts falsch, solange das stochastische Modell (\nearrow Kapitel 2) passend ist. Das verursacht lediglich einen höheren Bearbeitungsaufwand.

Oft ist es auch so, dass Größen als Beobachtungen betrachtet werden, die im engeren Sinne keine „ursprünglichen Messwerte“ sind, sondern Ergebnisse vorangegangener Berechnungen, z.B. Punktkoordinaten. Manchmal nennt man diese Größen auch „Pseudobeobachtungen“. Für die Ausgleichung spielt es keine Rolle, solange das Ausgleichungsmodell korrekt aufgestellt wird.

Die Beobachtungen fassen wir zu einem Vektor \mathbf{L} zusammen. Die Reihenfolge ist beliebig, muss aber in allen folgenden Vektoren und Matrizen, die sich auf Beobachtungen beziehen, übereinstimmend gewählt werden. Die Anzahl der Beobachtungen bezeichnen wir mit n .

Hinweis: In der Mathematik und in vielen angewandten Disziplinen ist es üblich, Vektoren mit kleinen Buchstaben zu bezeichnen. Wir weichen hier aus Gründen der Übersichtlichkeit von dieser Tradition ab.

Beispiel: In einem ebenen Dreieck soll der Flächeninhalt F bestimmt werden. Die 3 Innenwinkel α, β, γ und die 3 Strecken a, b, c werden gemessen. Kein Messwert kann als frei von Messabweichungen angesehen werden. Damit ist $n = 6$. Der Vektor der Beobachtungen lautet



$$L = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

oder mit denselben Beobachtungen in anderer Reihenfolge.

1.2 PARAMETER UND PARAMETRISIERUNG

Ein Ausgleichungsmodell ist ein mathematisches Modell der Messsituation. Es muss diese so detailgetreu wie nötig wiedergeben, aber nicht detailgetreuer.

1. Effekte, die für die Lösung der Ausgleichungsaufgabe eine Rolle spielen, müssen im Modell berücksichtigt werden.
2. Effekte, die aufgrund ihrer geringen Größe vernachlässigt werden können oder keinen Beitrag zur Lösung der Aufgabe liefern, dürfen im Modell nicht berücksichtigt werden.

Das **funktionale Ausgleichungsmodell** ist der Teil des Ausgleichungsmodells, der die funktionalen (d.h. nicht-stochastischen) Beziehungen der beteiligten Größen beschreibt. Es wird durch **Parameter** beschrieben, das sind numerische Größen, mit deren exakter Kenntnis das Modell als Ganzes vollständig erfasst wird.

Durch welche Parameter ein Ausgleichungsmodell beschrieben werden soll, ist oft vom Anwender wählbar. Man nennt diesen Arbeitsschritt die **Parametrisierung**. Eindeutig durch die Aufgabe festgelegt ist aber deren Anzahl, die wir mit u bezeichnen. Die Parameter fassen wir zu einem Vektor \mathbf{X} zusammen. Die Reihenfolge ist beliebig, muss aber in allen folgenden Vektoren und Matrizen, die sich auf Parameter beziehen, übereinstimmend gewählt werden.

Es gibt mehrere Fehlerquellen bei der Parametrisierung, die zu einer falschen Lösung der Ausgleichungsaufgabe führen oder die Lösung unmöglich machen:

1. Ein Ausgleichungsmodell enthält mehr Parameter, als unbedingt nötig. u ist zu groß. Oft kann ein Parameter aus den Werten anderer Parameter streng berechnet werden. Man spricht von **Überparametrisierung**.
2. Ein Ausgleichungsmodell enthält zu wenige Parameter. u ist zu klein. Schließlich können die Beobachtungsgleichungen nicht korrekt aufgestellt werden. Man spricht von **Unterparametrisierung**.
3. Ein Ausgleichungsmodell enthält zwar die richtige Anzahl, aber falsche Parameter. Auch hier kann das korrekte Aufstellen der Beobachtungsgleichungen nicht gelingen.

Oft kann eine geschickte Wahl der Parameter die Lösung der Ausgleichungsaufgabe vereinfachen, eine ungeschickte Wahl kann diese erschweren. Das wird im Folgenden noch mit einem Beispiel belegt. Wenn die eigentlich gesuchten Größen einer Ausgleichungsaufgabe zugleich Parameter sind, kann dies Vorteile haben, muss aber nicht.

1.3 GEMESSENE WERTE, WAHRE WERTE UND SCHÄTZWERTE

Jeder Größe können mehrere Werte zugeordnet werden, die wir symbolisch wie folgt unterscheiden:

	Beobachtungen	Parameter
Anzahl	n	u
gemessener Wert	L_i	-
wahrer Wert	\tilde{L}_i	\tilde{X}_j
Schätzwert, auch „ausgeglichener Wert“ genannt	\hat{L}_i	\hat{X}_j
Näherungswert	L_i^0	X_j^0

Ein Parameter kann zugleich eine Beobachtung sein. In dem Fall ist $\tilde{X}_j = \tilde{L}_i$ und wie sich zeigen wird, auch $X_j^0 = L_i^0$ und $\hat{X}_j = \hat{L}_i$. Welche Rolle die Näherungswerte spielen, wird später klar.

Beispiel (Fortsetzung): Ein ebenes Dreieck wird bezüglich seiner Größe und Form durch drei Parameter vollständig beschrieben. Zur Lösung der Ausgleichungsaufgabe, nämlich die bestmögliche Bestimmung des Flächeninhalts, spielt die Lage des Dreiecks in der Ebene oder im Raum keine Rolle, also sollten Koordinaten der Eckpunkte im Modell nicht berücksichtigt werden. Somit ist $u = 3$. Die konkrete Wahl der Parameter kann auf verschiedene Weise erfolgen:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ oder ...}$$

Theoretisch wäre auch folgende Parametrisierung denkbar (↗Abbildung auf Seite 5):

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ h \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ F \end{pmatrix}$$

(Liegt der Höhenfußpunkt außerhalb einer Seite, wird ein Seitenabschnitt p oder q negativ angegeben.) Eine Überparametrisierung wäre

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

denn aus \tilde{b} , $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ kann \tilde{a} exakt berechnet werden. Obwohl wir letztlich nur am Flächeninhalt F interessiert sind, wäre $u = 1$ und

$$\mathbf{X} = (F)$$

eine Unterparametrisierung. Die Beobachtungsgleichungen wären nicht aufstellbar, wie gleich gezeigt wird. Eine falsche Parametrisierung wäre

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

denn aus $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ kann $\tilde{\gamma}$ exakt berechnet werden. Außerdem wären die Beobachtungsgleichungen nicht aufstellbar, wie gleich gezeigt wird.

1.4 BEOBACHTUNGSGLEICHUNGEN

Besonders einfach ist die Situation, wenn sich die wahren Werte aller Beobachtungen $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_n$ als Funktionen der wahren Werte der Parameter $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_u$ darstellen lassen:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1 &= \varphi_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u) \\ &\vdots \\ \tilde{L}_n &= \varphi_n(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u) \end{aligned}$$

Diese n Gleichungen nennen wir die **Beobachtungsgleichungen**. Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ heißen **vermittelnde Funktionen**. In Vektorschreibweise haben die Beobachtungsgleichungen kurz folgende Form:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{X}})$$

Sollte es ausnahmsweise zwar möglich sein, den Zusammenhang von Beobachtungen und Parametern in der Form

$$\boldsymbol{\Phi}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}$$

auszudrücken, aber diese Gleichungen sind nicht nach $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_n$ auflösbar, so liegt kein Modell vor, welches sich direkt im Rahmen der vermittelnden Ausgleichung bearbeiten lässt. Wir werden im Kapitel 7 ein Konzept erarbeiten, wie das trotzdem gelingen kann.

Beispiel (Fortsetzung): 1. In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

lauten die $n = 6$ Beobachtungsgleichungen

$$\tilde{\alpha} = \arccos\left(\frac{\tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 - \tilde{a}^2}{2\tilde{b}\tilde{c}}\right) \quad \tilde{a} = \tilde{a}$$

$$\tilde{\beta} = \arccos\left(\frac{\tilde{a}^2 + \tilde{c}^2 - \tilde{b}^2}{2\tilde{a}\tilde{c}}\right) \quad \tilde{b} = \tilde{b}$$

$$\tilde{\gamma} = \arccos\left(\frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - \tilde{c}^2}{2\tilde{a}\tilde{b}}\right) \quad \tilde{c} = \tilde{c}$$

a, b, c sind zugleich Beobachtungen und Parameter.

2. In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

lauten die Beobachtungsgleichungen

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \quad \tilde{a} = \tilde{c} \frac{\sin(\tilde{\alpha})}{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}$$

$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta} \quad \tilde{b} = \tilde{c} \frac{\sin(\tilde{\beta})}{\sin(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}$$

$$\tilde{\gamma} = 200 \text{ gon} - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \quad \tilde{c} = \tilde{c}$$

α, β, c sind zugleich Beobachtungen und Parameter.

3. In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ F \end{pmatrix}$$

lauten die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= \arctan\left(\frac{2\tilde{F}}{\tilde{p}(\tilde{p} + \tilde{q})}\right) & \tilde{a} &= \sqrt{\tilde{q}^2 + \frac{4\tilde{F}^2}{(\tilde{p} + \tilde{q})^2}} \\
\tilde{\beta} &= \arctan\left(\frac{2\tilde{F}}{\tilde{q}(\tilde{p} + \tilde{q})}\right) & \tilde{b} &= \sqrt{\tilde{p}^2 + \frac{4\tilde{F}^2}{(\tilde{p} + \tilde{q})^2}} \\
\tilde{\gamma} &= \arctan\left(\frac{\tilde{p}(\tilde{p} + \tilde{q})}{2\tilde{F}}\right) + \arctan\left(\frac{\tilde{q}(\tilde{p} + \tilde{q})}{2\tilde{F}}\right) & \tilde{c} &= \tilde{p} + \tilde{q}
\end{aligned}$$

4. In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

würde es nicht gelingen, Beobachtungsgleichungen für a, b, c aufzustellen, denn Funktionen $\tilde{a} = \varphi(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ usw. existieren nicht. Daran erkennt man eine falsche Parametrisierung oder auch eine Unterparametrisierung.

Wichtig ist, dass in den vermittelnden Funktionen φ_i (rechte Seiten der Beobachtungsgleichungen) **nur Parameter und fehlerfreie Größen** stehen, und keine Beobachtungen.

1.5 URSPRÜNGLICHE VERBESSERUNGSGLEICHUNGEN

Die wahren Werte in den Vektoren $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{X}}$ sind unbekannt und können praktisch nicht bestimmt werden. Also müssen diese **geschätzt** werden. Die Schätzwerte fassen wir in den Vektoren $\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{X}}$ zusammen. Sie sollen alle bekannten Eigenschaften der wahren Werte $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{X}}$ besitzen, nämlich die Beobachtungsgleichungen erfüllen:

$$\hat{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{X}})$$

Man nennt $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u$ auch die **ausgeglichenen Parameter** und $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n$ die **ausgeglichenen Beobachtungen**.

Die additive Abänderung der gemessenen Beobachtung L_i in die ausgeglichene Beobachtung \hat{L}_i nennt man die **Verbesserung** v_i (manchmal auch das "Residuum").

$$L_i + v_i = \hat{L}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Formal gesehen ist v_i der Schätzwert der negativen Messabweichung: $v_i = -\hat{\epsilon}_i$. Somit müsste man eigentlich \hat{v}_i schreiben. Das hat sich in der geodätischen Literatur aber

nicht durchgesetzt. In der mathematisch orientierten Literatur findet man häufiger $-\hat{\varepsilon}_i$ statt v_i . Wir setzen die Verbesserungen zu einem Vektor \mathbf{v} zusammen:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Damit haben die **ursprünglichen Verbesserungsgleichungen** die Vektorform

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{X}}) \quad \text{oder} \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{X}}) - \mathbf{L}$$

Wir bevorzugen hier die erste Schreibweise, weil diese deutlicher die Trennung zwischen Parametern und Beobachtungen zum Ausdruck bringt. Im Einzelnen:

$$\begin{aligned} L_1 + v_1 &= \varphi_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) \\ &\vdots \\ L_n + v_n &= \varphi_n(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung): In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

lauten die ursprünglichen Verbesserungsgleichungen

$$\alpha + v_\alpha = \hat{\alpha}$$

$$a + v_a = \hat{c} \frac{\sin(\hat{\alpha})}{\sin(\hat{\alpha} + \hat{\beta})}$$

$$\beta + v_\beta = \hat{\beta}$$

$$b + v_b = \hat{c} \frac{\sin(\hat{\beta})}{\sin(\hat{\alpha} + \hat{\beta})}$$

$$\gamma + v_\gamma = 200 \text{ gon} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}$$

$$c + v_c = \hat{c}$$

1.6 LINEARISIERTE VERBESSERUNGSGLEICHUNGEN

Ist mindestens eine der vermittelnden Funktionen φ_i nichtlinear, ist das Gleichungssystem der ursprünglichen Verbesserungsgleichungen nichtlinear und kann nicht direkt gelöst werden. Eine **Linearisierung** ist erforderlich. Dazu benötigen wir für alle Parameter Näherungswerte, die wir in einem Vektor \mathbf{X}^0 zusammenfassen. Solche **Näherungsparameter** können praktisch auf verschiedene Weise beschafft werden:

- ① Manchmal verfügt man bereits aus vorangegangenen Messungen über ungefähre Kenntnisse einiger Parameterwerte. Diese sollen vielleicht in der aktuellen Messkampagne nur überprüft oder genauer erhalten werden, oder es sollen geringe Änderungen erfasst werden. Dann setzt man diese Werte als Näherungsparameter an.
- ② Sind einige Parameter kleine Korrektionsgrößen wie Nullpunktkorrekturen oder thermische Ausdehnungskoeffizienten, können diese näherungsweise mit Null angenommen werden.
- ③ Vielleicht wurden einige Parameter auch direkt gemessen, also $\tilde{X}_j = \tilde{L}_i$, so dass die gemessenen Werte als Näherungsparameter verwendet werden können: $X_j^0 := L_i$
- ④ Aus den n Beobachtungsgleichungen können u herausgegriffen werden, mit denen die Parameter eindeutig und ohne Ausgleichung mit den gemessenen Werten näherungsweise bestimmbar sind. Aus der Vielzahl von Möglichkeiten wählt man dabei jene Gleichungen aus, für die sich diese Aufgabe möglichst leicht lösen lässt. Die Ergebnisse werden als Näherungsparameter verwendet.

Zumindest die Methode ④ ist immer möglich, aber auch die aufwändigste.

Beispiel (Fortsetzung): In den Parametrisierungen

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ F \end{pmatrix}$$

sind einige vermittelnde Funktionen nichtlinear, nämlich in der ersten Parametrisierung 3, in der zweiten 2 und in der dritten 5 von jeweils $n = 6$ Funktionen.

In der ersten und zweiten Parametrisierung kann man direkt die gemessenen Werte als Näherungsparameter verwenden (\nearrow Methode ③). In der dritten Parametrisierung kann man zunächst F^0 z.B. aus den drei gemessenen Seiten a, b, c mit der Heronschen Flächenformel berechnen und danach

$$p^0 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{2F^0}{c}\right)^2} \quad \text{und} \quad q^0 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2F^0}{c}\right)^2}$$

Das entspricht indirekt der Auswahl der drei Beobachtungsgleichungen für die Seiten a, b, c und Auflösung nach den Parametern (\nearrow Methode ④). Wenn man das direkt versuchen würde, käme das einer Herleitung der Heronschen Flächenformel gleich, die sehr schwer ist.

In Abwandlung dieser Methode kann man aber auch einfachere Berechnungsmöglichkeiten nutzen, z.B.

$$F^0 = \frac{ab}{2} \sin(\gamma), \quad p^0 = b \cos(\alpha), \quad q^0 = c - p^0$$

Wichtig ist nur, dass gilt:

$$p^0 \approx \tilde{p}, \quad q^0 \approx \tilde{q}, \quad F^0 \approx \tilde{F}$$

Nun erfolgt die **Linearisierung** durch eine Taylor-Reihenentwicklung so, dass genähert gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) \\ \approx \varphi_1(X_1^0, X_2^0, \dots, X_u^0) + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{X}_1} \right|_{X^0} \cdot (\hat{X}_1 - X_1^0) + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{X}_2} \right|_{X^0} \cdot (\hat{X}_2 - X_2^0) + \dots \\ + \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{X}_u} \right|_{X^0} \cdot (\hat{X}_u - X_u^0) \\ \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) \\ \approx \varphi_n(X_1^0, X_2^0, \dots, X_u^0) + \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \hat{X}_1} \right|_{X^0} \cdot (\hat{X}_1 - X_1^0) + \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \hat{X}_2} \right|_{X^0} \cdot (\hat{X}_2 - X_2^0) + \dots \\ + \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \hat{X}_u} \right|_{X^0} \cdot (\hat{X}_u - X_u^0) \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Ersatzfunktionen rechts von „ \approx “ in den Argumenten $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u$ **lineare** Funktionen sind.

Der Index X^0 hinter den partiellen Ableitungen bedeutet: Diese Ableitungen sind an der Stelle der Näherungsparameter $\hat{X} = X^0$ zu berechnen. Dort stimmen rechte und linke Seite exakt überein, weil alle Summanden rechts wegfallen, außer dem ersten. Je weiter man sich von dieser Stelle entfernt, desto weniger stimmt diese Näherung. Es entstehen **Linearisierungsfehler**.

Man hofft zunächst, dass die Näherungsparameter X^0 so gut mit den ausgeglichenen Parametern \hat{X} übereinstimmen, dass diese Fehler klein sind. Später wird man erkennen, ob diese Hoffnung berechtigt war, nämlich daran, ob die ausgeglichenen Werte in \hat{X}, \hat{L} wie gewünscht die Beobachtungsgleichungen erfüllen. Wir werden diese sogenannte Schlussprobe im Abschnitt 3.3 erläutern.

Unter Vernachlässigung von Linearisierungsfehlern schreiben wir in den Verbesserungsgleichungen jetzt „=“ statt „≈“. Zur Abkürzung der Schreibweise führen wir die folgenden Symbole ein:

$$\begin{array}{lll} L_1^0 = \varphi_1(\hat{X}_1^0, \hat{X}_2^0, \dots, \hat{X}_u^0) & l_1 = L_1 - L_1^0 & \hat{x}_1 = \hat{X}_1 - X_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n^0 = \varphi_n(\hat{X}_1^0, \hat{X}_2^0, \dots, \hat{X}_u^0), & l_n = L_n - L_n^0 & \hat{x}_u = \hat{X}_u - X_u^0 \end{array}$$

L_1^0, \dots, L_n^0 nennen wir die Näherungsbeobachtungen, l_1, \dots, l_n nennen wir die **gekürzten Beobachtungen** und $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_u$ die **gekürzten Parameter**. Wenn die Näherungsparameter gut waren, so dass $\mathbf{X}^0 \approx \tilde{\mathbf{X}}$ ist, sind die gekürzten Werte betragsmäßig kleine Größen, so dass wir nur wenige Dezimalstellen mitführen müssen. Alle diese Werte fassen wir zu Vektoren $\mathbf{L}^0, \mathbf{l}, \hat{\mathbf{x}}$ zusammen:

$$\mathbf{L}^0 := \begin{pmatrix} L_1^0 \\ \vdots \\ L_n^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l} := \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_u \end{pmatrix}$$

Weiter bauen wir eine Matrix \mathbf{A} mit n Zeilen und u Spalten wie folgt auf:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{X}_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \hat{X}_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \hat{X}_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix}$$

Alle Ableitungen sind an der Stelle der Näherungsparameter $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0$ zu berechnen. Mit diesen Symbolen kann man die **linearisierten Verbesserungsgleichungen** wie folgt schreiben.

$$\begin{array}{l} L_1 + v_1 = \varphi_1(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) = L_1^0 + a_{11} \cdot \hat{x}_1 + a_{12} \cdot \hat{x}_2 + \cdots + a_{1u} \cdot \hat{x}_u \\ \vdots \\ L_n + v_n = \varphi_n(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u) = L_n^0 + a_{n1} \cdot \hat{x}_1 + a_{n2} \cdot \hat{x}_2 + \cdots + a_{nu} \cdot \hat{x}_u \end{array}$$

oder in Matrix-Vektorschreibweise:

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{L}^0 + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

oder noch kürzer:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

Beispiel (Fortsetzung): In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

und mit der Wahl der gemessenen Werte α, β, c als Näherungsparameter, d.h.

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

erhält man die Näherungsbeobachtungen \mathbf{L}^0 mit den Werten

$$\alpha^0 = \alpha$$

$$a^0 = c \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\beta^0 = \beta$$

$$b^0 = c \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\gamma^0 = 200\text{gon} - \alpha - \beta$$

$$c^0 = c$$

und damit den Vektor der gekürzten Beobachtungen $\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}^0$ als

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha + \beta + \gamma - 200\text{gon} \\ a - c \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ b - c \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Elemente dieses Vektors sind Null oder kleine Größen, denn das dritte Element ist der Innenwinkelsummenwiderspruch und das vierte und fünfte Element ist jeweils der Widerspruch eines Sinussatzes im Dreieck. Die Matrix \mathbf{A} hat mit den Abkürzungen

$$S := \sin(\alpha + \beta), \quad C := \cos(\alpha + \beta)$$

folgendes Aussehen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ c \frac{\cos(\alpha) \cdot S - \sin(\alpha) \cdot C}{\rho \cdot S^2} & -c \frac{\sin(\alpha) \cdot C}{\rho \cdot S^2} & \frac{\sin(\alpha)}{S} \\ -c \frac{\sin(\beta) \cdot C}{\rho \cdot S^2} & c \frac{\cos(\beta) \cdot S - \sin(\beta) \cdot C}{\rho \cdot S^2} & \frac{\sin(\beta)}{S} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass im Nenner teilweise ein Faktor ρ zur Umrechnung der Winkleinheit ins Bogenmaß berücksichtigt werden muss, falls die Winkel α, β nicht im Bogenmaß eingesetzt und erhalten werden sollen.

Ist das Dreieck näherungsweise gleichseitig mit der Seitenlänge 100m, erhält man mit

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} 200/3 \text{ gon} \\ 200/3 \text{ gon} \\ 100 \text{ m} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ c \frac{\sqrt{3}/2}{\rho \cdot 0,75} & c \frac{\sqrt{3}/2 \cdot 0,5}{\rho \cdot 0,75} & \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} \\ c \frac{\sqrt{3}/2 \cdot 0,5}{\rho \cdot 0,75} & c \frac{\sqrt{3}/2}{\rho \cdot 0,75} & \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1.8138 & 0.9069 & 1 \\ 0.9069 & 1.8138 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wären alle Beobachtungsgleichungen linear, so müsste man nicht linearisieren. Die Beobachtungsgleichungen hätten dann schon die Gestalt

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{L}^0 + \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$$

und man könnte formal $\mathbf{X}^0 = \mathbf{0}$ setzen: Die gekürzten Parameter sind gleich den ungekürzten, d.h. ein Kürzen findet nicht statt. Um mit gekürzten Größen arbeiten zu können, ist eine Linearisierung also immer noch sinnvoll, wenn auch nicht zwingend. Wir gehen im Weiteren vom Fall aus, dass gekürzt wurde.

In den ursprünglichen Verbesserungsgleichungen sind die ausgeglichenen Parameter $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u$ und die Verbesserungen v_1, v_2, \dots, v_n unbekannt, das sind zusammen $n + u$ unbekannte Größen. Allerdings liegen nur n Gleichungen vor, so dass eine eindeutige Lösung noch nicht gelingt.

Erinnerung: Ein lineares Gleichungssystem kann in der Regel nur dann eindeutig gelöst werden, wenn es genauso viele Gleichungen wie Unbekannte enthält.

2 DAS STOCHASTISCHE AUSGLEICHUNGSMODELL

Zur Lösung des Ausgleichungsproblems muss etwas über die vermutete Größe der Messabweichungen bekannt sein. Diese Kenntnisse bilden das stochastische Ausgleichungsmodell und müssen sich auf Erfahrungswerte stützen. Liegen solche nicht vor, wird das stochastische Modell nicht gut zu den Beobachtungen passen können, und die Ausgleichungsergebnisse werden nicht optimal sein. Die Werte der ausgeglichenen Größen $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{L}}, \mathbf{v}$ sind davon aber weniger betroffen. Viel deutlicher verfälscht sind

- Genauigkeitsmaße und Genauigkeitsschätzungen
- Zuverlässigkeitsmaße
- Ergebnisse von statistischen Tests

Zur Aufstellung des stochastischen Modells betrachten wir vier Fälle:

2.1 ALLE BEOBACHTUNGEN SIND UNKORRELIERT UND HABEN BEKANNTE STANDARDABWEICHUNGEN

Der einfachste Fall ist der, dass jeder Beobachtung L_i schon vor der Ausgleichung eine bekannte Standardabweichung σ_{L_i} zugeordnet werden kann. Wir nennen diesen Wert die **a priori Standardabweichung der Beobachtung** L_i .

Nun wählen wir eine beliebige positive Zahl σ_0 , die **Standardabweichung der Gewichtseinheit** (σ_0^2 wird auch **Varianzfaktor** genannt), und berechnen für alle Beobachtungen je ein Gewicht p_i nach der bekannten Formel [ZGMabw, Abschnitt 3.4]

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{L_i}^2}$$

Eine Möglichkeit der Wahl von σ_0 ist, dass für eine gewählte Beobachtung L_i gesetzt wird: $\sigma_0 = \sigma_{L_i}$. Dann wird dadurch dieser Beobachtung das Gewicht $p_i = 1$ zugewiesen.

Wenn alle Beobachtungen dieselbe Maßeinheit haben, dann wird empfohlen, auch σ_0 mit dieser Einheit zu wählen, dann sind alle Gewichte dimensionslose Größen (ohne Einheit). Andernfalls wird empfohlen, σ_0 ohne Einheit zu wählen, und die Gewichte in derselben Einheit wie die Beobachtungen zuzüglich Exponent -2 auszudrücken. Dann kann man in der weiteren Rechnung die Einheiten unterdrücken und erhält alle Ergebnisse ebenfalls in dieser Einheit.

Nun werden die Gewichte zu einer **Gewichtsmatrix** zusammengefasst, die für unkorrelierte Beobachtungen eine Diagonalmatrix ist:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{pmatrix}$$

Beispiel (Fortsetzung): Haben alle gemessenen Winkel α, β, γ die a priori Standardabweichung 2 mgon und alle gemessenen Strecken a, b, c die a priori Standardabweichung 5 mm, dann kann man z.B. $\sigma_0 = 0,01$ (ohne Einheit) setzen und erhält:

$$p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = 25 \text{ gon}^{-2}$$

$$p_a = p_b = p_c = 4 \text{ m}^{-2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 25 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Diese Gewichtsmatrix passt zu den Streckenbeobachtungen in Meter und den Winkelbeobachtungen in Gon. Alle Ergebnisse würden in Meter und Gon erhalten. Sie passt allerdings nicht zu Winkelbeobachtungen in Grad oder im Bogenmaß oder zu Streckenbeobachtungen in Zentimeter. Ein falsches Ergebnis würde erhalten.

2.2 ALLE BEOBACHTUNGEN SIND UNKORRELIERT UND ALLE RELATIVEN GENAUIGKEITEN SIND BEKANNT, ABSOLUTE JEDOCH NICHT

In diesem Fall wird für je zwei Beobachtungen L_i und L_j nur das **Verhältnis** $\sigma_{L_i} : \sigma_{L_j}$ als bekannt angenommen. Man weiß also aus Erfahrung, um wieviel genauer oder ungenauer eine Beobachtung ist, im Vergleich zu einer anderen, oder ob diese gleich genau sind. Hier kann einer gewählten Beobachtung L_i ein beliebiges positives Gewicht p_i zugeordnet werden, und alle anderen Beobachtungen L_j erhalten ihr Gewicht p_j aus

$$\sigma_0^2 = p_i \cdot \sigma_{L_i}^2 = p_j \cdot \sigma_{L_j}^2 \quad \rightarrow \quad p_j = p_i \frac{\sigma_{L_i}^2}{\sigma_{L_j}^2}$$

Die Standardabweichung der Gewichtseinheit σ_0 wird durch diese Wahl **implizit** festgelegt, allerdings auf den unbekanntem Wert $p_i \cdot \sigma_{L_i}^2$. Dieser Fall ist nur sinnvoll, wenn alle Beobachtungen dieselbe Einheit haben.

Beispiel (Fortsetzung): Wir haben Winkel und Strecken als Beobachtungen, also ist z.B. σ_α : σ_α als relative Genauigkeit nicht sinnvoll. Dieser Fall kann nicht angewendet werden.

2.3 ALLE BEOBACHTUNGEN SIND UNKORRELIERT UND NUR EINIGE RELATIVE GENAUIGKEITEN SIND BEKANNT

Man bildet Gruppen von gleichartigen Beobachtungen, insbesondere mit derselben Einheit. Je weniger Gruppen man bilden muss, desto besser. Innerhalb jeder Gruppe wird für je zwei Beobachtungen L_i und L_j das **Verhältnis** $\sigma_{L_i} : \sigma_{L_j}$ als bekannt angenommen. Nun wird in jeder Gruppe eine Gewichts festlegung wie im letzten Abschnitt durchgeführt. In jeder Gruppe gibt es jetzt einen unbekanntem Varianzfaktor, der geschätzt werden muss. Diese Methode nennt man **Varianzkomponentenschätzung**.

Beispiel (Fortsetzung): Wir bilden eine Gruppe aus Winkeln α, β, γ , die alle gleiche Messgenauigkeit besitzen, und eine Gruppe aus Strecken a, b, c , die ebenso untereinander gleich genau sind. Wir können allen Winkeln das Gewicht Eins zuordnen, und allen Strecken ebenso. Diese Gewichte beziehen sich jetzt aber auf zwei unterschiedliche, unbekannte Varianzfaktoren bzw. Standardabweichungen der Gewichtseinheit und können nicht zu einer Gewichtsmatrix zusammengesetzt werden.

Den Fall der Varianzkomponentenschätzung betrachten wir hier nicht weiter. Die Lösung der Ausgleichungsaufgabe wäre **sehr viel schwieriger**, als in den beiden davor beschriebenen Fällen.

Hinweis: Um diesen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, werden in der Praxis oftmals Genauigkeitsannahmen getroffen, die gar nicht ausreichend durch Erfahrungen gesichert sind. Die Ausgleichungsergebnisse können dann nicht optimal sein.

2.4 ALLE BEOBACHTUNGEN SIND KORRELIERT UND DIE KOFAKTORMATRIX IST BEKANNT

Der Fall kann auftreten, wenn die Beobachtungen in Wahrheit nicht direkt gemessen sind, sondern einer gemeinsamen Auswertung (z.B. Ausgleichung) entstammen, der man die Kovarianzmatrix Σ_L oder die Kofaktormatrix Q_L entnimmt. Wie das geschieht, wird im Abschnitt 4.2 erklärt werden. Dann ist zu setzen:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_L^{-1} \quad \text{oder} \quad P = Q_L^{-1}$$

Der erste Fall ist eine Verallgemeinerung des Falls aus Abschnitt 2.1: σ_0 kann beliebig gewählt werden. Der zweite Fall ist eine Verallgemeinerung des Falls aus Abschnitt 2.2:

σ_0 stimmt mit dem Wert aus der Vorauswertung überein und ist eventuell dort unbekannt.

Sind tatsächlich Korrelationen vorhanden, ist die Gewichtsmatrix keine Diagonalmatrix, sondern enthält auch Werte außerhalb der Hauptdiagonale oder ist sogar voll besetzt.

Beispiel (Fortsetzung): Die Winkel könnten aus einer Differenz gemessener Richtungen mit a priori Standardabweichungen σ_r hervorgegangen sein. Da aber in jeden Winkel andere Richtungen eingegangen sind, wären die Beobachtungen gar nicht korreliert. Es wäre nichts weiter zu berücksichtigen, als

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_r \sqrt{2}$$

Anders wäre es z.B., wenn die Winkel einer vorangegangenen gemeinsamen Netzausgleichung entstammen würden. Die Kovarianzmatrix $\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$ oder die Kofaktormatrix $Q_{\alpha\beta\gamma}$ müsste man dann direkt dieser Ausgleichung entnehmen. Die Kovarianz- oder Kofaktormatrix der $n = 6$ Beobachtungen müsste wie folgt zusammengesetzt werden:

$$\Sigma_L = \begin{pmatrix} \Sigma_{\alpha\beta\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_c^2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad Q_L = \begin{pmatrix} Q_{\alpha\beta\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_c \end{pmatrix}$$

wobei die Strecken a, b, c als untereinander und mit den Winkeln unkorreliert angenommen werden.

Den Fall korrelierter Beobachtungen betrachten wir nicht hier weiter, obwohl er im Unterschied zur Varianzkomponentenschätzung prinzipiell keine Probleme verursacht. In der Praxis wird dieser Fall wenn möglich dadurch vermieden, dass man auf die als unkorreliert zu betrachtenden Originalbeobachtungen zurückgreift [7GMabw, Abschnitt 4.2]. Ist das nicht möglich, werden Korrelationen oft vernachlässigt. Wie schon erwähnt, können die Ausgleichungsergebnisse dann nicht optimal sein.

3 LÖSUNG DES LINEARISIERTEN AUSGLEICHUNGSPROBLEMS

3.1 SCHÄTZPRINZIPIEN

Das System der n linearisierten Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

enthält $u + n$ unbekannte Größen, das sind die u gekürzten Parameter im Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ und die n Verbesserungen im Vektor \mathbf{v} . Leider kann ein solches System **nicht eindeutig** gelöst werden. So versuchen wir, in der Vielzahl der Lösungen diejenige herauszugreifen, die uns besonders plausibel erscheint. Dazu gibt es mindestens drei unterschiedliche Konzepte, auch **Schätzprinzipien** genannt:

① **Methode der kleinsten Quadrate:** Wenn keine groben Fehler aufgetreten sind, erwartet man, dass die Verbesserungen betragsmäßig kleine Größen sind. Man favorisiert also Lösungen mit betragsmäßig kleinen Verbesserungen gegenüber solchen mit großen Verbesserungen. Als Maß für die Größe der Verbesserungen verwendet man aber meist nicht die Lösung mit der kleinsten Summe der Beträge, das wäre auch schwieriger, sondern mit der **kleinsten Quadratesumme der Verbesserungen**. Haben wir Beobachtungen mit unterschiedlicher Genauigkeit, berücksichtigen wir noch die Gewichte, so dass ungenaue Beobachtungen wegen ihres niedrigen Gewichts größere Verbesserungen haben dürfen, als genaue. Das Schätzprinzip lautet also

$$\text{Minimiere } \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{\sigma_{L_i}} \right)^2$$

Diese Methode hat den Nachteil, dass das Schätzprinzip mathematisch wenig begründet scheint. Jedoch hat es sich in der Praxis bewährt.

② **Beste lineare erwartungstreue Schätzung:** Die Schätzung der gekürzten Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ soll

- eine **lineare** Funktion der gekürzten Beobachtungen \mathbf{l} sein, d.h. die Gestalt $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{l}$ mit einer noch festzulegenden Matrix \mathbf{H} besitzen,
- eine **erwartungstreue** Schätzung im Sinne von $E\{\hat{\mathbf{x}}\} = \tilde{\mathbf{x}}$ sein, auch „unverzerrte“ Schätzung genannt, und
- eine **beste** Schätzung sein, d.h. die Standardabweichungen der Schätzwerte $\sigma_{\hat{x}_i}$ sollen minimal sein, auch „minimalvariante“ Schätzung genannt.

Diese Methode hat den Nachteil, dass nur lineare Funktionen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{l}$ zugrunde gelegt werden können. Möglicherweise würde eine nichtlineare Funktion bessere Ergebnisse liefern. Jedoch ist das Schätzprinzip mathematisch schlüssig begründet.

③ **Maximum-Likelihood-Methode:** Wir gehen davon aus, dass alle Messabweichungen Zufallsvariable von einem bekannten Wahrscheinlichkeitverteilungstyp sind. Meist wird die Normalverteilung verwendet [7GMabw, Abschnitt 2.1]. Die Parameter sollen so geschätzt werden, dass die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung gerade die gemessenen Beobachtungen erhalten zu haben, maximal ist. Diese Methode hat den Nachteil, dass die Verteilung der Messabweichungen vom Typ her wie gesagt bekannt sein muss. Auch andere Verteilungen als die Normalverteilung können benutzt werden, dann ist die Rechnung aber schwieriger. Das Schätzprinzip ist jedoch mathematisch gut begründet.

3.2 BERECHNUNG DER AUSGEGLICHENEN GRÖßEN

Die fundamentale Erkenntnis ist, dass für den Fall der Normalverteilung in ③ alle drei Schätzprinzipien auf **dieselbe Schätzfunktion** führen. Zur Herleitung der Schätzfunktion verweisen wir auf die Literatur. Wir teilen nur das Ergebnis mit:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$

Hierbei wurde die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ als regulär vorausgesetzt. Die im letzten Abschnitt unter Punkt ② genannte Matrix \mathbf{H} hat also die Gestalt $\mathbf{H} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$. Die gekürzten ausgeglichenen Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ können als Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n}$$

gefunden werden. Man nennt es das **Normalgleichungssystem** mit der Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ und dem Normalgleichungsvektor $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$.

Hinweis: Die herausragende Stellung des Normalgleichungssystems resultiert daraus, dass seine Lösung $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}$ den größten Rechenaufwand erfordert. In der Zeit hochleistungsfähiger Computer hat es seinen Schrecken aber verloren.

Ist das Normalgleichungssystem singulär, also ist $\det(\mathbf{N}) = 0$, so ist das funktionale Ausgleichungsmodell falsch formuliert worden. In der geodätischen Netzausgleichung liegt häufig ein **Datumsdefekt** vor, d.h. über die Lagerung des Netzes im Raum wurde nicht ausreichend durch einen Anschlusszwang verfügt. Obwohl dieses Thema enorm wichtig ist, muss es in diesem einführenden Text ausgeklammert werden.

Im weiteren Rechengang lösen wir das System der linearisierten Verbesserungsgleichungen nach \mathbf{v} auf und berechnen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}.$$

Weiter erhalten wir die ausgeglichenen Parameter aus

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{x}}$$

und die ausgeglichenen Beobachtungen aus

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v}.$$

In den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{P} stehen oft Werte, die eine Maßeinheit haben. Bei der Zahlenrechnung werden diese Einheiten nicht mitgeführt. Es ist daher nötig, alle Eingangsgrößen soweit in ihren Einheit zu harmonisieren, dass man an die ausgeglichenen Größen die richtigen Einheiten anhängt. Bei \mathbf{v} und $\hat{\mathbf{L}}$ sind das dieselben Einheiten wie bei \mathbf{L} . Bei $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{X}}$ sind das dieselben Einheiten wie bei \mathbf{X}^0 . Auch die Gewichtsmatrix \mathbf{P} muss bezüglich der Einheiten passend sein (↗Kapitel 2).

Außerdem ist darauf zu achten, dass die Matrix \mathbf{N} nicht gleichzeitig mit Zahlen von sehr unterschiedlicher Größenordnung gefüllt ist, wie etwa 10^{10} und 10^{-10} . Andernfalls könnte es zur Lösung des Normalgleichungssystems zu numerischen Stellenauslösungen kommen. Durch geschickte Wahl der Einheiten kann man einen solchen Effekt meist vermeiden.

3.3 SCHLUSSPROBE UND WEITERE PROBEN

Schließlich ist noch zu überprüfen, dass die ausgeglichenen Größen wie gewünscht die Beobachtungsgleichungen erfüllen:

$$\hat{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{X}})$$

Man bezeichnet diese Überprüfung als **Schlussprobe** oder Ausgleichungsprobe. Widersprüche in der Schlussprobe sollten deutlich kleiner sein (Faustregel: $<1/10$), als die Standardabweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen, die im Abschnitt 4.4 berechnet werden. Wenn die Schlussprobe nicht ausreichend erfüllt ist, kann das drei Ursachen haben:

1. Rechenfehler liegen vor.
2. Die Rechengenauigkeit reicht nicht aus. Z.B. wurden Zwischenergebnisse zu stark gerundet.
3. Die Näherungsparameter sind zu schlecht, d.h. $\mathbf{X}^0 \approx \tilde{\mathbf{X}}$

Die dritte Ursache kann nur auftreten, wenn mindestens eine der vermittelnden Funktionen φ_i nichtlinear ist. Man müsste dann hoffen, dass zumindest die ausgeglichenen Parameter $\hat{\mathbf{X}}$ so gut sind, dass man mit der Zuweisung $\mathbf{X}^0 := \hat{\mathbf{X}}$ in eine

neue Ausgleichung einsteigen könnte, um sich dem idealen Ergebnis schrittweise, d.h. iterativ anzunähern. Der Prozess wäre abgeschlossen, wenn die Schlussprobe ausreichend erfüllt ist.

Hinweis: Selten treten Fälle auf, in denen die Widersprüche in der Schlussprobe während der Iteration größer statt kleiner werden. Dann kann man versuchen, Näherungsparameter auf andere Weise zu beschaffen. Abhilfe würde auch ein Änderung des Rechenverfahrens bringen, auf das wir in diesem einführenden Text nicht eingehen.

Ist die Schlussprobe erfüllt, ist das keineswegs die Garantie, dass alles korrekt ist. Es kann immer noch das funktionale oder stochastische Modell falsch aufgestellt worden sein. Die Schlussprobe zeigt solche Fehler nicht an.

Beispiel (Fortsetzung): Die Schlussprobe ist in diesem Fall nichts anderes als die Überprüfung, ob alle sechs ausgeglichenen Größen $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ zum selben Dreieck gehören. In der 1. Parametrisierung sind drei Beobachtungsgleichungen nichtlinear, in der 2. Parametrisierung zwei und in der 3. fünf (↗Abschnitt 1.4). Die Schlussprobe könnte also nicht erfüllt sein, ohne dass Rechenfehler oder Rechenungenauigkeiten aufgetreten sind. In diesem Fall wird das trotzdem nicht sein, weil sehr gute Näherungsparameter zur Verfügung stehen.

Eine weitgehende, wenn auch immer noch nicht vollständige Sicherheit, dass die Ausgleichung korrekt berechnet wurde, bietet die Lösung der Aufgabe mit zwei unterschiedlichen Parametrisierungen. Das erfordert aber nahezu den doppelten Aufwand.

Beispiel (Fortsetzung): Man könnte die Lösung z.B. mit der 1. und 3. Parametrisierung (↗Abschnitt 1.4) jeweils unabhängig voneinander berechnen. Wären die Verbesserungen in beiden Fällen gleich, würde das die Richtigkeit der ausgeglichenen Größen bestätigen.

Es gibt noch eine weitere Probe, die kurz erwähnt werden soll:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0$$

Diese sogenannte $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Probe zeigt nur Fehler bei der Lösung des Normalgleichungssystems an. Da dieses praktisch mit einem Taschenrechner oder Computer gelöst wurde, sollte diese Probe immer erfüllt sein und ist deshalb verzichtbar. Selbst Eingabefehler in den Matrizen und Vektoren würden mit dieser Probe nicht aufgedeckt.

3.4 FUNKTIONEN AUSGEGLICHENER GRÖßEN

Ist man nicht direkt an den ausgeglichenen Größen $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{L}}$ interessiert, so kann man daraus weitere Größen berechnen, z.B. m Funktionen ausgeglichener Parameter

$$f_k = \psi_{X,k}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_u), \quad k = 1, \dots, m$$

oder m Funktionen ausgeglichener Beobachtungen

$$f_k = \psi_{L,k}(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n), \quad k = 1, \dots, m$$

Alle Funktionen $\psi_{L,k}$ kann man auch in der Form $\psi_{X,k}$ schreiben und umgekehrt. Oft ist $\psi_{X,k}$ praktisch vorzuziehen, weil diese Funktion weniger Argumente hat. Andererseits kann die Funktion $\psi_{L,k}$ manchmal einfacher aufgebaut sein.

Hinweis: Genau genommen sind die Funktionswerte f_k Schätzwerte, müssten also in der Form \hat{f}_k geschrieben werden. Wir verzichten darauf, weil Werte f_k , die keine Schätzwerte sind, nicht vorkommen, so dass keine Verwechslung möglich ist.

Beispiel (Fortsetzung): In der Parametrisierung

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ F \end{pmatrix}$$

ist der gesuchte Flächeninhalt F des Dreiecks gleichzeitig ein Parameter. Der ausgeglichene Wert wird unmittelbar als Lösung der Normalgleichungen erhalten. In den Parametrisierungen

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

muss der Flächeninhalt noch wie folgt als Funktion ausgeglichener Parameter berechnet werden:

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c})(\hat{a} - \hat{b} + \hat{c})(\hat{a} + \hat{b} - \hat{c})(\hat{b} + \hat{c} - \hat{a})} \quad \text{oder} \quad F = \frac{\hat{c}^2}{2(\cot(\hat{\alpha}) + \cot(\hat{\beta}))}$$

Die erste Formel ist die Heronsche Formel in der langen Schreibweise. Alternativ dazu könnte in beiden Fällen auch die einfachere Formel

$$F = \frac{\hat{a} \cdot \hat{b} \cdot \sin(\hat{\gamma})}{2}$$

benutzt werden. F ist nunmehr eine Funktion ausgeglichener Beobachtungen. War die Schlussprobe erfüllt, stimmen alle Ergebnisse überein. Sind keine weiteren Größen zu berechnen, ist $m = 1$ zu setzen.

Sind $m > 1$ Funktionswerte f_k zu berechnen, dann setzen wir diese zu einem Vektor \mathbf{f} zusammen:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

4 GENAUIGKEITSBERECHNUNG

4.1 A PRIORI GENAUIGKEITSSMAÙE UND A POSTERIORI GENAUIGKEITSSCHÄTZUNGEN

Zusätzlich zu den ausgeglichenen Größen erhält man für diese auch GenauigkeitsmaÙe oder Genauigkeitsschätzungen. Dazu benötigt man für alle interessierenden Zufallsvektoren $L, \hat{X}, \hat{L}, v, f$ usw.

1. die zugehörigen **Kofaktormatrizen** Q und
2. die Standardabweichung der Gewichtseinheit σ_0 oder ihre Schätzung $\hat{\sigma}_0$.

Daraus gewinnt man die **Kovarianzmatrizen** Σ oder $\hat{\Sigma}$ und daraus wiederum die Varianzen oder Standardabweichungen aller ausgeglichenen Größen, aber auch Kovarianzen, Konfidenzintervalle, Fehler- und Konfidenzellipsen usw. Wenn sich die Genauigkeitsberechnung auf einen a priori bekannten Wert σ_0 stützt (↗Abschnitt 2.1), erhält man die **a priori** GenauigkeitsmaÙe. Benutzt man den Schätzwert $\hat{\sigma}_0$ (↗Abschnitt 2.2), erhält man die **a posteriori** Genauigkeitsschätzungen.

Man erkennt, dass die GenauigkeitsmaÙe und Genauigkeitsschätzungen für gekürzte und ungekürzte Größen gleich sind:

$$Q_L = Q_l, \quad Q_{\hat{X}} = Q_{\hat{x}}, \quad Q_{\hat{L}} = Q_l$$

Dasselbe gilt auch für die Kovarianzmatrizen Σ oder $\hat{\Sigma}$ sowie Standardabweichungen σ und $\hat{\sigma}$ usw. Der Grund ist, dass das Kürzen, nämlich das Subtrahieren eines festgelegten, nicht zufälligen Werts X^0 oder L^0 die Genauigkeit nicht verändert.

Hinweis: Praktisch ist es ähnlich wie das Kürzen von Koordinaten der Landesvermessung durch Weglassen führender Ziffern. Auch hier ändert sich dadurch die Genauigkeit der Koordinaten nicht.

Wir vereinbaren, dass im Folgenden die Indizes von $Q, \Sigma, \hat{\Sigma}, \sigma, \hat{\sigma}$ usw. für L, l und X, x immer große Buchstaben sind.

4.2 KOFAKTORMATRIZEN

Die Kofaktormatrizen Q enthält wie die Gewichtsmatrix P die Information über die **relative** Genauigkeit der Elemente des Zufallsvektors, auf die sie sich bezieht. Beide Matrizen stehen in der Beziehung $Q = P^{-1}$ zueinander, sind also ineinander umrechenbar. Beide enthalten dieselbe Information.

Hinweis: Im Grunde könnte man in der Ausgleichung statt mit Gewichten und Kofaktoren auch ausschließlich mit Kofaktoren arbeiten. Leider ist das Konzept der Gewichte zu tief in der Geodäsie

verwurzelt, um es noch eliminieren zu können. Immerhin benutzt man Gewichte nur für die gemessenen Beobachtungen \mathbf{L} und sonst ausschließlich Kofaktoren. Die Gewichtsmatrix \mathbf{P} erhält deshalb auch keinen Index, weil klar ist, dass sie für die gemessenen Beobachtungen \mathbf{L} gilt.

Alle Kofaktormatrizen sind symmetrisch mit nichtnegativen Hauptdiagonalelementen.

Ausgangspunkt ist die gegebene Kofaktormatrix der gemessenen Beobachtungen:

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{P}^{-1}$$

Durch die Schätzfunktion $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{l} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$ pflanzen sich die Kofaktoren von \mathbf{l} nach $\hat{\mathbf{x}}$ fort, nämlich nach dem Kofaktorfortpflanzungsgesetz [↗FKF, Abschnitt 1.5]

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_L\mathbf{H}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}$$

Erinnerung: Das Kofaktorfortpflanzungsgesetz ist eine allgemeinere Darstellungsform des Gewichtfortpflanzungsgesetzes. Es gilt auch für korrelierte Größen.

Auch die anderen Kofaktormatrizen ergeben sich durch Anwendung des Kofaktorfortpflanzungsgesetzes auf die Formeln des weiteren Rechenganges (↗Abschnitt 3.2). Die Ergebnisse sind

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_L - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}}$$

Beispiel (Fortsetzung): Ist das Dreieck näherungsweise gleichseitig mit der Seitenlänge 100 m, berechnet man mit den bereits erhaltenen Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{P}

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 66,449 & 38,159 & 10,883 \\ 38,159 & 66,449 & 10,883 \\ 10,883 & 10,883 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0,0236 & -0,0118 & -0,0107 \\ -0,0118 & 0,0236 & -0,0107 \\ -0,0107 & -0,0107 & 0,1027 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}} = \begin{pmatrix} 0,0236 & -0,0118 & \dots & -0,0107 \\ -0,0118 & 0,0236 & \ddots & -0,0107 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -0,0107 & -0,0107 & \dots & 0,1027 \end{pmatrix}$$

Möchte man schließlich die Kofaktormatrizen für Funktionen ausgeglichener Parameter oder ausgeglichener Beobachtungen gewinnen, muss man das Kofaktorfortpflanzungsgesetz auf diese Funktionen $\psi_{X,i}$ oder $\psi_{L,i}$ anwenden:

$$\mathbf{Q}_f = \mathbf{F}_X\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{F}_X^T \quad \text{oder} \quad \mathbf{Q}_f = \mathbf{F}_L\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}}\mathbf{F}_L^T$$

mit den **Funktionalmatrizen**

$$\mathbf{F}_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{X,1}}{\partial \hat{X}_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{X,1}}{\partial \hat{X}_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{X,m}}{\partial \hat{X}_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{X,m}}{\partial \hat{X}_u} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{F}_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{L,1}}{\partial \hat{L}_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{L,1}}{\partial \hat{L}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{L,m}}{\partial \hat{L}_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{L,m}}{\partial \hat{L}_n} \end{pmatrix}$$

Die \mathbf{F} -Matrizen haben m Zeilen und u oder n Spalten. Die Kofaktormatrix \mathbf{Q}_f hat m Zeilen und Spalten. Hat man die Ausgleichung noch nicht durchgeführt, so dass noch keine ausgeglichenen Größen vorliegen, ist es möglich, die Ableitungen wie bei der \mathbf{A} -Matrix an der Stelle der Näherungsparameter \mathbf{X}^0 oder der gemessenen Beobachtungen \mathbf{L} zu berechnen. Sonst würde man die ausgeglichenen Größen $\hat{\mathbf{X}}$ oder $\hat{\mathbf{L}}$ verwenden.

Beispiel (Fortsetzung): In den Parametrisierungen

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

musste der Flächeninhalt F als Funktion ausgeglichener Parameter oder ausgeglichener Beobachtungen berechnet werden. Damit die partiellen Ableitungen möglichst einfach zu bilden sind, empfiehlt sich eine möglichst einfache Flächenformel aus Winkeln und Seiten. Die Heronsche Formel würde sehr komplizierte partielle Ableitungen verursachen. Am einfachsten ist die Flächenformel

$$F = \frac{\hat{a} \cdot \hat{b} \cdot \sin(\hat{\gamma})}{2}$$

so dass man den Flächeninhalt F als Funktion ausgeglichener Beobachtungen berechnet. Die zugehörige \mathbf{F} -Matrix lautet:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\hat{a} \cdot \hat{b} \cdot \cos(\hat{\gamma})}{2 \cdot \rho} & \frac{\hat{b} \cdot \sin(\hat{\gamma})}{2} & \frac{\hat{a} \cdot \sin(\hat{\gamma})}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Für das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 100 m erhält man mit Näherungswerten 100 m und 67 gon

$$\mathbf{F} = (0 \quad 0 \quad 39,27 \quad 43,30 \quad 43,30 \quad 0)$$

und es ergibt sich die Kofaktormatrix mit einer Zeile und einer Spalte

$$\mathbf{Q}_f = (625)$$

Die Kofaktormatrix enthält bereits die Information über den Grad der Korrelation der Elemente des Zufallsvektors, auf den sie sich bezieht. Z.B. berechnet man den

Korrelationskoeffizient $\rho_{\hat{X}_i \hat{X}_j}$ zweier ausgeglichener Parameter \hat{X}_i und \hat{X}_j mit der Formel

$$\rho_{\hat{X}_i \hat{X}_j} = \frac{q_{\hat{X}_i \hat{X}_j}}{\sqrt{q_{\hat{X}_i} \cdot q_{\hat{X}_j}}}$$

$q_{\hat{X}_i}, q_{\hat{X}_j}, q_{\hat{X}_i \hat{X}_j}$ sind die Kofaktoren ausgeglichener Parameter \hat{X}_i und \hat{X}_j , das heißt die Elemente der Matrix $Q_{\hat{X}}$. $q_{\hat{X}_i}$ und $q_{\hat{X}_j}$ stehen auf der Hauptdiagonale auf den Plätzen i und j und $q_{\hat{X}_i \hat{X}_j}$ steht in Zeile i und Spalte j . Dasselbe macht man mit jeder anderen Kofaktormatrix genauso.

Beispiel (Fortsetzung): Ist das Dreieck näherungsweise gleichseitig mit der Seitenlänge 100 m, berechnet man mit der bereits erhaltenen Matrix $Q_{\hat{L}}$

$$\rho_{\hat{\alpha} \hat{\beta}} = \rho_{\hat{\alpha} \hat{\gamma}} = \rho_{\hat{\beta} \hat{\gamma}} = \frac{-0,0118}{\sqrt{0,0236 \cdot 0,0236}} = -0,50$$

Die Korrelation der Winkel untereinander ist negativ, also wird ein zu groß geschätzter Winkel α im statistischen Mittel häufiger mit zu klein geschätzten Winkeln β, γ einher gehen. Das ist verständlich, weil die Innenwinkelsumme $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 200$ gon ja stimmen muss. Bei den Seiten ergibt sich

$$\rho_{\hat{a} \hat{b}} = \rho_{\hat{a} \hat{c}} = \rho_{\hat{b} \hat{c}} = \frac{0,0736}{\sqrt{0,1027 \cdot 0,1027}} = 0,72$$

Die Korrelation ist positiv, also sind häufiger alle Seiten zu lang oder alle zu kurz, als dass einige zu lang und andere zu kurz sind. Das ist verständlich, weil die Ähnlichkeit des Dreiecks über die gemessenen Winkel statistisch gesehen gewahrt bleiben muss.

Aufgabe: Wären die Winkel ungenauer gemessen, erwarten Sie, dass die Korrelationen von $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ untereinander stärker oder schwächer wird? Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit Ihrer Überlegung durch Änderung der Gewichte.

4.3 A POSTERIORI VARIANZFAKTOR

Ist der Varianzfaktor σ_0^2 wie im Fall des stochastischen Modells aus Abschnitt 2.2 nicht bekannt, muss dieser aus Beobachtungen geschätzt werden. Das Ergebnis dieser Schätzung ist der a posteriori Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$. Aber auch in allen anderen Fällen ist das sinnvoll, um einen Globaltest durchführen zu können (↗ Abschnitt 5.3).

Die Schätzung basiert auf ähnlichen **Schätzprinzipien**, wie in Abschnitt 3.1. Leider führen verschiedene Prinzipien in diesem Fall nicht immer auf dasselbe Ergebnis. In

der Praxis hat sich das Prinzip der **besten quadratischen erwartungstreuen Schätzung** durchgesetzt. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u}$$

Um zur **a posteriori Standardabweichung der Gewichtseinheit** $\hat{\sigma}_0$ zu gelangen, muss nur noch die Wurzel gezogen werden:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u}}$$

***Hinweis:** Das Schätzprinzip wird zur mathematischen Vereinfachung für $\hat{\sigma}_0^2$ formuliert, nicht für $\hat{\sigma}_0$. (Für die Geodäsie wäre es anders herum sinnvoller, weil praktisch mit Standardabweichungen und nicht mit Varianzen gearbeitet wird.) Leider ist dadurch der Schätzwert $\hat{\sigma}_0$ verzerrt! $\hat{\sigma}_0$ wird im statistischen Mittel häufiger zu klein geschätzt. Genauer: $E\{\hat{\sigma}_0\} < \tilde{\sigma}_0$. Um bei einer einfachen Schätzfunktion bleiben zu können, wird dieser Mangel praktisch hingenommen, weil er mit größer werdender Redundanz immer unbedeutender wird.*

$\hat{\sigma}_0$ hat dieselbe Einheit wie σ_0 .

Beispiel (Fortsetzung): Nehmen wir an, wir hätten folgende Verbesserungen berechnet:

$$v_\alpha = 1,5 \text{ mgon}; v_\beta = -0,7 \text{ mgon}; v_\gamma = 3,9 \text{ mgon}$$

$$v_a = -4,1 \text{ mm}; v_b = 0,9 \text{ mm}; v_c = 2,0 \text{ mm}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\frac{25 \cdot (0,0015^2 + 0,0007^2 + 0,0039^2) + 4 \cdot (0,0041^2 + 0,0009^2 + 0,0020^2)}{6 - 3}} \\ &= 0,013 \end{aligned}$$

$\hat{\sigma}_0$ hat keine Einheit, weil auch σ_0 ohne Einheit gewählt wurde.

4.4 VARIANZEN, KOVARIANZEN, STANDARDABWEICHUNGEN

Nachdem alle benötigten Kofaktormatrizen vorliegen, berechnet man die a priori Kovarianzmatrizen Σ oder die a posteriori Kovarianzmatrizen $\hat{\Sigma}$ nach dem Grundschema

$$\Sigma = \sigma_0^2 \mathbf{Q} \quad \text{oder} \quad \hat{\Sigma} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}$$

Die Elemente dieser Matrizen sind die Varianzen σ_i^2 oder $\hat{\sigma}_i^2$ auf der Hauptdiagonale und die Kovarianzen σ_{ij}^2 oder $\hat{\sigma}_{ij}^2$ auf den anderen Plätzen. Daraus gewinnt man die Standardabweichungen nach dem Grundschemata

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} \quad \text{oder} \quad \hat{\sigma}_i = \sqrt{\hat{\sigma}_i^2}$$

Man kann diese Größen aber auch direkt aus den Kofaktorenmatrizen berechnen nach dem Grundschemata

$$\sigma_i = \sigma_0 \sqrt{q_i} \quad \text{oder} \quad \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_i}$$

mit den Kofaktoren q_i auf der Hauptdiagonale der entsprechenden Kofaktormatrix \mathbf{Q} . Die a priori Genauigkeitsmaße können nur im Fall des stochastischen Modells aus Abschnitt 2.1 berechnet werden, andernfalls ist σ_0 unbekannt. Diese Werte können dann aber auch schon vor der Messung berechnet werden und eröffnen damit die Möglichkeit der **Planung** von Messungen. Im Gegensatz dazu werden für die a posteriori Genauigkeitsschätzungen die Werte der gemessenen Beobachtungen benötigt.

Aus $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_L - \mathbf{Q}_{\hat{L}}$ (↗Abschnitt 4.2) und mit $q_{v_i} \geq 0$ (denn Hauptdiagonalelemente von Kofaktormatrizen sind niemals negativ) folgt

$$q_{L_i} = q_{\hat{L}_i} + q_{v_i} \geq q_{\hat{L}_i}$$

Die Genauigkeiten der ausgeglichenen Beobachtungen sind somit niemals schlechter, als die der gemessenen Beobachtungen, sonst lag ein Rechenfehler vor. Im Extremfall, dass diese gleich sind, liegt es daran, dass eine Beobachtung nicht ausgeglichen werden konnte. (In Abschnitt 5.2 werden wir erkennen, dass einer solchen Beobachtung der Redundanzanteil Null zugeordnet wird.)

In den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{P} stehen oft Werte, die eine Maßeinheit haben. Bei der Zahlenrechnung wird diese Einheit nicht mitgeführt. Es ist daher nötig, alle Eingangsgrößen soweit in ihren Einheit zu harmonisieren, dass man an die Standardabweichungen die richtigen Einheiten anhängt. Folgend der Empfehlung bei der Aufstellung des stochastischen Modells sind das dieselben Einheiten wie bei den zugehörigen Beobachtungen.

Beispiel (Fortsetzung): Mit dem bei der Aufstellung des stochastischen Modells festgelegten Wert $\sigma_0 = 0,01$ (ohne Einheit) und den berechneten Kofaktoren erhält man die a priori Genauigkeitsmaße

$$\sigma_{\hat{\alpha}} = \sigma_{\hat{\beta}} = \sigma_{\hat{\gamma}} = 0,01 \sqrt{0,0236} = 0,0015 \text{ gon} = 1,5 \text{ mgon}$$

$$\sigma_{\hat{a}} = \sigma_{\hat{b}} = \sigma_{\hat{c}} = 0,01\sqrt{0,1027} = 0,0032 \text{ m} = 3,2 \text{ mm}$$

Mit dem im letzten Abschnitt berechneten Wert $\hat{\sigma}_0 = 0,013$ (ohne Einheit) und den berechneten Kofaktoren erhält man die a posteriori Genauigkeitsmaße

$$\hat{\sigma}_{\alpha} = \hat{\sigma}_{\beta} = \hat{\sigma}_{\gamma} = 0,013\sqrt{1/25} = 0,0026 \text{ gon} = 2,6 \text{ mgon}$$

$$\hat{\sigma}_a = \hat{\sigma}_b = \hat{\sigma}_c = 0,013\sqrt{1/4} = 0,0065 \text{ gon} = 6,5 \text{ mm}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}} = 0,013\sqrt{0,0236} = 0,0020 \text{ gon} = 2,0 \text{ mgon}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_{\hat{b}} = \hat{\sigma}_{\hat{c}} = 0,013\sqrt{0,1027} = 0,0042 \text{ m} = 4,2 \text{ mm}$$

Es ergibt sich dieselbe Genauigkeit für $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{c}$ als ausgeglichener Parameter und als ausgeglichene Beobachtung, wie man dies erwarten würde, denn es sind ja optimale Schätzwerte für dieselben Größen. Die Genauigkeiten sind erwartungsgemäß höher als die der gemessenen Beobachtungen, wobei man immer nur a priori mit a priori und a posteriori mit a posteriori vergleichen darf.

Wegen der Gleichseitigkeit des Dreiecks sind die Genauigkeiten aller ausgeglichenen Seiten gleich und ebenso die Genauigkeiten aller ausgeglichenen Winkel. Für ein schiefwinkliges Dreieck wäre das nicht so.

Für den Flächeninhalt F erhält man

$$\sigma_F = 0,01\sqrt{625} = 0,25 \text{ m}^2 \quad \text{oder} \quad \hat{\sigma}_F = 0,013\sqrt{625} = 0,33 \text{ m}^2$$

4.5 FEHLERELLIPSEN UND LAGESTANDARDABWEICHUNG

Die Genauigkeit von Lagepunkten wird oft durch Fehlerellipsen veranschaulicht. Die Größe der Ellipsen und die Länge und Ausrichtung der Achsen ermöglicht es, schnell einen visuellen Eindruck von der Genauigkeit der Lagepunkte zu erhalten. Wir unterscheiden verschiedene Typen von Fehlerellipsen. Am wichtigsten sind

- die Helmertschen Standardellipsen und
- die Konfidenzellipsen.

Der zweite Typ stellt eine Verallgemeinerung des Konfidenzintervalls einer skalaren Größe dar [7GMabw Abschnitt 3.5]. Der Vorteil von Konfidenzellipsen ist, dass damit eine Wahrscheinlichkeitsaussage verbunden ist. Die Berechnung ist allerdings schwieriger und soll in diesem einführenden Text nicht weiter thematisiert werden.

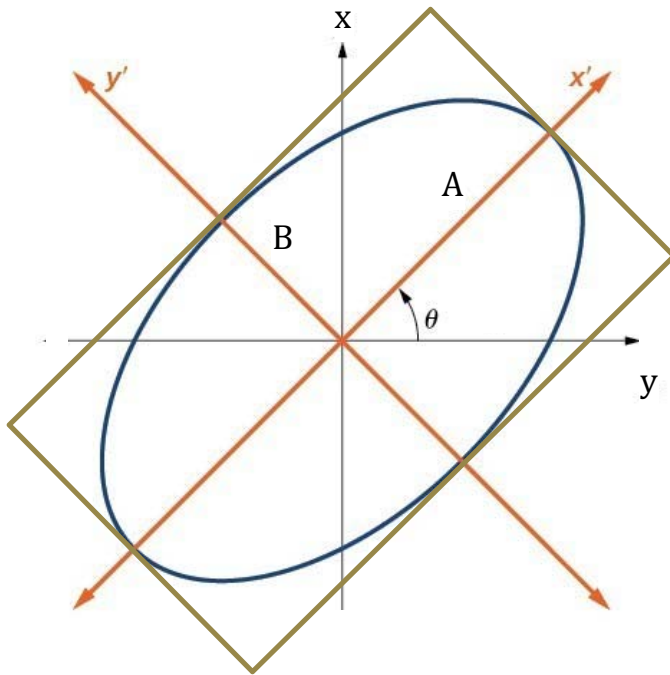


Abbildung: Helmertsche Standardellipse

Die **Helmertsche Standardellipse** stellt eine Verallgemeinerung der Standardabweichung einer skalaren Größe dar. Die Berechnung ist relativ einfach. Hier unterscheiden wir die a priori Standardellipse, die aus a priori Genauigkeitsmaßen berechnet wird und schon vor der Messung angegeben werden kann, und die a posteriori Standardellipse, die auf a posteriori Genauigkeitsschätzungen basiert.

Ausgangspunkt sind Kofaktoren oder Varianzen und Kovarianzen, die aus den entsprechenden Kofaktor- oder Kovarianzmatrizen zu entnehmen sind. Wenn die Koordinaten der Lagepunkte die Parameter der Ausgleichung sind, dann wären das die Matrizen $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$ oder $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}}$ bzw. $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\hat{x}}$. Sind diese hingegen Funktionen ausgeglichener Parameter, z.B. Neupunkte nach der Transformation über identische Punkte, würde man die Matrizen \mathbf{Q}_f oder $\mathbf{\Sigma}_f$ bzw. $\hat{\mathbf{\Sigma}}_f$ heranziehen.

Die große Halbachse \hat{A} und die kleine Halbachse \hat{B} der a posteriori Standardellipse berechnet man wie folgt:

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{matrix} \right\} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{2}} \sqrt{q_x + q_y \pm \sqrt{(q_x - q_y)^2 + 4q_{xy}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 \pm \sqrt{(\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2)^2 + 4\hat{\sigma}_{xy}^2}}$$

Die a priori Standardellipse mit den Halbachsen A, B erhält man, wenn man in der angegebenen Formel alle Dächer weglässt.

Schließlich benötigt man noch die Orientierung der Achsen. Dazu berechnet man den Richtungswinkel der großen Halbachse mit

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \cdot q_{xy}}{q_x - q_y} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \cdot \hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2} \right)$$

Bei der Berechnung des „arctan“ ist die Quadrantenregel zu beachten.

Zur Festlegung von Genauigkeitskriterien für Lagepunkte wünscht man sich ein skalares Genauigkeitsmaß. Hierfür hat sich die Lagestandardabweichung verbreitet. In der a posteriori Version berechnet man:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2} = \sqrt{\hat{A}^2 + \hat{B}^2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_x + q_y}$$

Die a priori Lagestandardabweichung σ erhält man, wenn man in der angegebenen Formel alle Dächer weglässt. Ein Vorteil der Lagestandardabweichung ist, dass sie unabhängig von der Ausrichtung der Koordinatenachsen x, y ist. Sie gibt die Länge der halben Diagonale des die Standardellipse umschreibenden Rechtecks an (↗Abbildung).

5 ZUVERLÄSSIGKEITSBERECHNUNG

5.1 WAS IST ZUVERLÄSSIGKEIT?

Unter Zuverlässigkeit verstehen wir die Fähigkeit eines Ausgleichungsmodells, sich durch die Beobachtungen zu kontrollieren. Es könnte sein, dass die gemessenen Beobachtungen nicht zu diesem Modell passen. Typisch ist, dass einzelne Beobachtungen durch grobe Messabweichungen verfälscht sein können, die als **Ausreißer** in Erscheinung treten. Da das stochastische Modell nur zufällige Messabweichungen vorsieht, würden die Beobachtungen nicht dazu passen.

Zuverlässigkeit ist nicht dasselbe wie Genauigkeit. Es kann sein, dass ausgeglichene Größen sehr genau berechenbar sind, aber nur eine geringe Zuverlässigkeit aufweisen. Grobe Messabweichungen würden in diesen Beobachtungen kaum erkannt werden. Es ist sogar oft so, dass einzelne oder wenige Beobachtungen besonders hoher Genauigkeit schlecht kontrollierbar sind, weil die Kontrolle einen Vergleich mit anderen Beobachtungen verlangt, diese aber wegen ihrer geringeren Genauigkeit dazu nicht in der Lage sind.

Wir unterscheiden zwei Arten von Zuverlässigkeit:

Innere Zuverlässigkeit bedeutet, dass grobe Messabweichungen sehr wahrscheinlich aufgedeckt werden.

Äußere Zuverlässigkeit bedeutet, dass dennoch oder wegen geringer innerer Zuverlässigkeit nicht aufgedeckte grobe Messabweichungen die Werte der ausgeglichenen Parameter kaum beeinflussen.

5.2 GESAMTREDUNDANZ UND REDUNDANZANTEILE

Eine Ausgleichung kann nur dann erfolgen, wenn redundante Beobachtungen vorliegen, d.h. mehr Beobachtungen, als zur Berechnung der Parameter mindestens nötig sind. Die Anzahl der redundanten Beobachtungen nennen wir die **Gesamtredundanz**

$$r = n - u$$

Beispiel (Fortsetzung): Die Gesamtredundanz beträgt $6 - 3 = 3$.

Die mögliche Genauigkeitssteigerung hängt u.a. von der Gesamtredundanz ab: Ist diese sehr hoch, können die ausgeglichenen Größen erheblich genauer bestimmt werden, als

dies ohne Redundanz möglich wäre. Aber auch die Zuverlässigkeit hängt entscheidend von der Redundanz ab, wie wir sehen werden.

Durch die Ausgleichung sollen Messabweichungen in den Beobachtungen geschätzt und durch Verbesserungen an den gemessenen Beobachtungen rückgängig gemacht werden. Wir beginnen mit der Frage, wie weitgehend das gelingt. Verbesserungen berechnet man durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l}$$

Wenn wir eine **Redundanzmatrix** \mathbf{R} wie folgt definieren

$$\mathbf{R} := \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}} \mathbf{P}$$

erhalten wir

$$\mathbf{v} = -\mathbf{R} \mathbf{l}$$

Die Redundanzmatrix \mathbf{R} ist eine symmetrische singuläre Matrix. Die Elemente bezeichnen wir mit r_{ij} . Sie sind dimensionslose Größen. Eine Verbesserung v_i berechnen wir also durch

$$v_i = -r_{i1}l_1 - r_{i2}l_2 - \dots - r_{ii}l_i - \dots - r_{in}l_n$$

Nehmen wir an, eine Beobachtung L_i wird durch eine Messabweichung ε_i verfälscht zu $L_i + \varepsilon_i$. Dadurch wird die gekürzte Beobachtung l_i zu $l_i + \varepsilon_i$ verfälscht. Um welchen Betrag wird diese Messabweichung durch eine Verbesserung v_i rückgängig gemacht? Man sieht wie folgt, dass sich v_i um $r_{ii}\varepsilon_i$ verringert:

$$v_i^{neu} = r_{i1}l_1 - r_{i2}l_2 - \dots - r_{ii}(l_i + \varepsilon_i) - \dots - r_{in}l_n = v_i - r_{ii}\varepsilon_i$$

Im Idealfall ist $r_{ii} = 1$, denn dann würde die Messabweichung ε_i vollständig durch die neue Verbesserung $v_i - \varepsilon_i$ an der neuen gemessenen Beobachtungen $L_i + \varepsilon_i$ rückgängig gemacht und die neue ausgeglichene Beobachtung \hat{L}_i wäre vom Einfluss der Messabweichung ε_i **vollständig** befreit. Außerdem ist zu wünschen, dass sich keine andere Verbesserung ändert, damit sich keine anderen ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{L}_j, j \neq i$ ebenfalls ändern, ohne betroffen zu sein. Das könnte aber nur sein, wenn $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ wäre und somit $\mathbf{v} = -\mathbf{l}$ und schließlich $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^0$. Das wäre aber ein unsinniges Ergebnis.

Immerhin kann man an der Redundanzmatrix \mathbf{R} ablesen, wie weitgehend die Messabweichungen in den Beobachtungen durch Verbesserungen an den gemessenen Beobachtungen rückgängig gemacht werden. Wir konzentrieren uns auf die Hauptdiagonalelemente r_{ii} , die oft auch als r_i geschrieben werden. Wir tun dies im Weiteren ebenfalls. Die Werte $r_i, i = 1, \dots, n$ heißen **Redundanzanteile** (manchmal

auch „Teilredundanzen“). Man kann zeigen, dass alle Redundanzanteile zwischen 0 und 1 liegen. Sie werden manchmal auch in Prozent angegeben und als **Einfluss auf die Verbesserung (EV)** bezeichnet. Je höher der Redundanzanteil einer Beobachtung, desto besser können normale zufällige Messabweichungen in dieser Beobachtung ausgeglichen werden, aber auch desto stärker treten grobe Messabweichungen durch betragsmäßig große Verbesserungen in derselben Beobachtung in Erscheinung. Auf diese Weise können grobe Messabweichungen aufgedeckt werden. Wir nennen Beobachtungen mit großen Redundanzanteilen **kontrollierbar**. In der Praxis hat sich folgende Unterteilung weit verbreitet, auch wenn sie nicht überall verbindlich ist:

Redundanzanteil	Einfluss auf die Verb.	Die Beobachtung L_i ist
$0,00 \leq r_i < 0,01$	$0\% \leq EV_i < 1\%$	praktisch nicht kontrollierbar
$0,01 \leq r_i < 0,10$	$1\% \leq EV_i < 10\%$	schlecht kontrollierbar
$0,10 \leq r_i < 0,30$	$10\% \leq EV_i < 30\%$	ausreichend kontrollierbar
$0,30 \leq r_i < 0,70$	$30\% \leq EV_i < 70\%$	gut kontrollierbar
$0,70 \leq r_i \leq 1,00$	$70\% \leq EV_i \leq 100\%$	nahezu vollständig redundant

Hinweis: Oft spricht man auch von „Kontrolliertheit“ statt „Kontrollierbarkeit“. Jedoch bedeutet ein großer Redundanzanteil noch nicht, dass das Ausgleichsmodell in Ordnung ist. Die eigentliche Kontrolle muss erst noch erfolgen.

Man kann weiter zeigen, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^n r_i = r = n - u$$

Die Redundanzanteile summieren sich zur Gesamtredundanz. Diese Formel eignet sich für die Zahlenrechnung auch als Rechenprobe. Damit alle Beobachtungen mindestens gut kontrollierbar sein können, muss gelten

$$n - u = \sum_{i=1}^n r_i \geq 0,3n \quad \leftrightarrow \quad n/u \geq 1,43$$

Das Verhältnis der Anzahlen von Beobachtungen und Parameter muss also etwa 3:2 oder besser sein.

Beispiel (Fortsetzung): Genau doppelt so viele Beobachtungen wie Parameter liegen vor. Von daher könnte gute Kontrollierbarkeit vorliegen.

Um die Kontrollierbarkeit aller Beobachtungen insgesamt zu verbessern, muss die Gesamtredundanz erhöht werden, also muss mehr gemessen werden. Ist die Gesamtredundanz vorgegeben, z.B. durch den Messaufwand, der insgesamt wirtschaftlich betrieben werden kann, sollte man dafür sorgen, dass alle Redundanzanteile etwa gleich groß sind, nämlich

$$r_1 \approx r_2 \approx \dots \approx r_n \approx \frac{n - u}{n}$$

Änderungen der Redundanzanteile können durch Änderungen des Beobachtungsplans bewirkt werden, auch durch Änderungen der Messgenauigkeiten.

Beispiel (Fortsetzung): Die Redundanzanteile für das gleichseitige Dreieck lauten

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0,41 = 41\% \quad \text{und} \quad r_4 = r_5 = r_6 = 0,59 = 59\%$$

Ihre Summe beträgt $r = 3 = 300\%$ und bestätigt die Richtigkeit der Berechnung. Alle Beobachtungen sind gut kontrollierbar. Würde man die Standardabweichung der Strecken auf 3 mm steigern, erhielte man die idealen Redundanzanteile 51% und 49%. Dasselbe würde man erreichen, wenn die Standardabweichung der Winkel auf 3 mgon gesenkt würde.

5.3 GLOBALTEST

Dieser statistische Hypothesentest überprüft das Ausgleichungsmodell insgesamt. Wie kein anderer Test kann er eine Vielzahl von Abweichungen der Beobachtungen gegenüber den Annahmen des Ausgleichungsmodells gleichzeitig aufdecken, ohne jedoch für eine spezielle Art von Abweichung besonders effektiv zu sein. Der Globaltest ist nur für die stochastischen Modelle aus Abschnitt 2.1 und Abschnitt 2.4 durchführbar.

Die Teststatistik lautet

$$T_{\text{global}} = (n - u) \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$$

Die Nullhypothese H_0 lautet: Das Ausgleichungsmodell ist korrekt. T_{global} hat in diesem Fall eine χ^2 -Verteilung mit $n - u$ Freiheitsgraden. Die symbolische Schreibweise dafür lautet

$$T_{\text{global}} | H_0 \sim \chi^2(n - u)$$

Sehr große T_{global} -Werte zeigen an, dass die a priori angenommene Genauigkeit der Beobachtungen wahrscheinlich nicht erreicht wurde. Sehr kleine Werte deuten darauf hin, dass die erreichte Genauigkeit besser ist, als erwartet.

Man legt eine Irrtumswahrscheinlichkeit α fest, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Globaltest eine Abweichung anzeigt, obwohl keine vorhanden ist, d.h. die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie zutrifft.

Rechtsseitiger Globaltest: H_0 wird nur abgelehnt, wenn die a priori angenommene Genauigkeit der Beobachtungen wahrscheinlich nicht erreicht wurde. Eine erreichte Genauigkeit besser als erwartet wird nicht als kritisch eingestuft. Der kritische Wert c_2 ist das $(1 - \alpha)$ -Quantil der $\chi^2(n - u)$ -Verteilung. Mit Microsoft Excel berechnet man diesen Wert mit der Funktion

$$c_2 = \text{CHIQU.INV}(1-\alpha;n-u)$$

H_0 wird abgelehnt, wenn $T_{\text{global}} > c_2$ ist.

Zweiseitiger Globaltest: H_0 wird auch abgelehnt, wenn die erreichte Genauigkeit besser zu sein scheint, als erwartet. Ein grober Fehler kann dann zwar nicht vorliegen, aber eine andere Modellabweichung, wahrscheinlich zu geringe a-priori-Genauigkeiten für einige oder alle Beobachtungen. Die kritischen Werte c_1, c_2 sind das $\alpha/2$ -Quantil und das $(1 - \alpha/2)$ -Quantil der $\chi^2(n - u)$ -Verteilung. Mit Microsoft Excel berechnet man diese Werte mit der Funktion

$$c_1 = \text{CHIQU.INV}(\alpha/2;n-u) \quad \text{und} \quad c_2 = \text{CHIQU.INV}(1-\alpha/2;n-u)$$

H_0 wird abgelehnt, wenn $T_{\text{global}} < c_1$ oder $T_{\text{global}} > c_2$ ist.

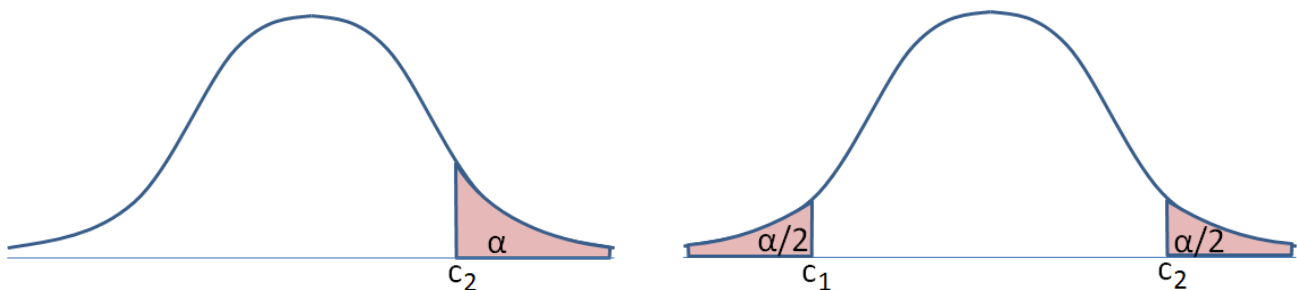


Abbildung: Rechtsseitiger und zweiseitiger Test

Beispiel (Fortsetzung): Mit dem im letzten Abschnitt 4.3 berechneten Wert $\hat{\sigma}_0 = 0,013$ erhält man

$$T_{\text{global}} = (6 - 3) \frac{0,013^2}{0,01^2} = 5,07$$

Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ erhält man beim rechtsseitigen Test

$$c_2 = 7,81$$

Dieser Wert wird nicht überschritten, also wird H_0 angenommen. Beim zweiseitigen Test ist mit demselben α

$$c_1 = 0,216 \quad \text{und} \quad c_2 = 9,35$$

Auch hier wird H_0 angenommen. Das Ausgleichungsmodell ist aus der Sicht des Globaltests akzeptabel.

Für Anwender, die nicht über Kenntnisse zu statistischen Tests verfügen, wird folgende **Faustregel** empfohlen: Das Ausgleichungsmodell gilt als korrekt, wenn

$$0,7 < \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} < 1,3$$

gilt. Dies ist ein zweiseitiger Test. Wie bei jeder Faustregel nimmt man damit in Kauf, dass häufiger als nötig eine falsche Entscheidung getroffen wird.

5.4 W-TEST

Wird beim rechtsseitigen Globaltest H_0 abgelehnt, dann wird ein grober Fehler in einer Beobachtung vermutet. Um diese Beobachtung zu identifizieren, führt man einen w-Test nach Baarda durch.

Die Teststatistik lautet

$$T_w = \max \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} = \max \frac{|v_i|}{\sigma_0} \sqrt{\frac{p_i}{r_i}}$$

Die Quotienten v_i/σ_{v_i} nennt man auch die **normierten Verbesserungen** NV_i . Sie sind dimensionslos. Die Teststatistik T_w ist also der extremste NV_i -Wert, manchmal auch NV_{\max} genannt.

Die Nullhypothese H_0 lautet wieder: Das Ausgleichungsmodell ist korrekt. Wenn diese zutrifft, folgen die NV_i -Werte einer Standardnormalverteilung. Der w-Test ist ein rechtsseitiger Test. Der kritische Wert c_2 wird wie folgt berechnet:

$$c_2 = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2n} \right)$$

Φ^{-1} ist die inverse Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Mit Microsoft Excel berechnet man den kritischen Wert mit der Funktion

$$c_2 = \text{NORM.S.INV}(1-\alpha/2/n)$$

Beispiel (Fortsetzung): Nach dem positiven Ergebnis des Globaltests ist entsprechend einer verbreiteten Lehrmeinung ein w-Test nicht zwingend erforderlich. Wenn man aber dennoch diesen Test anwenden will, geht man wie folgt vor: Die normierten Verbesserungen lauten

$$\frac{v_1}{\sigma_{v_1}} = \frac{v_1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{p_1}{r_1}} = \frac{0,0015}{0,01} \sqrt{\frac{25}{0,41}} = 1,17; \quad \frac{v_2}{\sigma_{v_2}} = -0,55; \quad \frac{v_3}{\sigma_{v_3}} = 3,05$$

$$\frac{v_4}{\sigma_{v_4}} = \frac{-0,0041}{0,01} \sqrt{\frac{4}{0,59}} = -1,07; \quad \frac{v_5}{\sigma_{v_5}} = 0,23; \quad \frac{v_6}{\sigma_{v_6}} = 0,52$$

Damit ist $T_w = 3,05$. Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ erhält man den kritischen Wert

$$c_2 = 2,64$$

H_0 wird abgelehnt. Die Beobachtung γ gilt demnach als grob falsch.

Hinweis: Um zu verhindern, dass wie im Beispiel sich Globaltest und w-Test widersprechen, benutzt man in beiden Tests unterschiedliche Irrtumswahrscheinlichkeiten. Darauf gehen wir in diesem einführenden Text nicht ein.

Für Anwender, die nicht über Kenntnisse zu statistischen Tests verfügen, wird folgende **Faustregel** empfohlen: Eine Beobachtung gilt als grob falsch, wenn

$$|NV_i| > 3$$

gilt. Wie bei jeder Faustregel nimmt man damit in Kauf, dass häufiger als nötig eine falsche Entscheidung getroffen wird.

5.5 τ -TEST

Für das stochastische Modell aus Abschnitt 2.2 sind Global- und w-Test nicht durchführbar. Als Ausreißertest kann aber ein τ -Test nach Pope durchgeführt werden. Die Teststatistik lautet

$$T_\tau = \max \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_{v_i}} = \max \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0} \sqrt{\frac{p_i}{r_i}}$$

Die Quotienten $v_i/\hat{\sigma}_{v_i}$ nennt man **studentisierte Verbesserungen** SV_i . Sie sind dimensionslos. Die Teststatistik T_τ ist also der extremste SV_i -Wert, manchmal auch SV_{\max} genannt.

Die Nullhypothese H_0 lautet wieder: Das Ausgleichungsmodell ist korrekt. Wenn diese zutrifft, folgen die SV -Werte einer τ -Verteilung. Kritische Werte lassen sich hier nicht so einfach berechnen wie beim w -Test. Ein Rechenwerkzeug für diese und viele andere kritische Werte finden Sie hier:

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/index.php?file=adjust/critv0>

Beispiel (Fortsetzung): Die studentisierten Verbesserungen lauten

$$\frac{v_1}{\hat{\sigma}_{v_1}} = \frac{v_1}{\hat{\sigma}_0} \sqrt{\frac{p_1}{r_1}} = \frac{0,0015}{0,013} \sqrt{\frac{25}{0,41}} = 0,90; \quad \frac{v_2}{\hat{\sigma}_{v_2}} = -0,42; \quad \frac{v_3}{\hat{\sigma}_{v_3}} = 2,34$$

$$\frac{v_4}{\hat{\sigma}_{v_4}} = \frac{-0,0041}{0,013} \sqrt{\frac{4}{0,59}} = -0,82; \quad \frac{v_5}{\hat{\sigma}_{v_5}} = 0,18; \quad \frac{v_6}{\hat{\sigma}_{v_6}} = 0,40$$

Damit ist $T_\tau = 2,34$. Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ erhält man den kritischen Wert

$$c_2 = 1,93$$

H_0 wird abgelehnt. Die Beobachtung γ gilt demnach ebenso als grob falsch.

Eine Faustregel ist hier noch fragwürdiger als im letzten Abschnitt und wird nicht empfohlen.

5.6 AUSGLEICHUNG VON GEMITTELTEN BEOBACHTUNGEN

Manchmal hat man die Möglichkeit, schon vor der Ausgleichung Mittel von Beobachtungen zu bilden und diese als auszugleichende Beobachtungen zu betrachten. Dadurch wird n kleiner. Das erleichtert etwas die Rechnung, weil einige Matrizen und Vektoren dadurch kleiner werden. Wenn die Gewichte der neuen Beobachtungen korrekt mit dem Gewichtsfortpflanzungsgesetz bestimmt wurden, erhält man **dieselben** ausgeglichenen Größen $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{L}}, \mathbf{v}$ wie ohne Mittelbildung. Jedoch sind die Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmaße anders.

Genauso wie n wird auch die Gesamtredundanz $r = n - u$ kleiner, denn u bleibt ja gleich. Die Zuverlässigkeit wird somit geringer. Selbst wenn die Genauigkeitsschätzungen besser werden, bedeutet das nicht, dass die Genauigkeiten

tatsächlich besser sind. Diese werden nur unzuverlässiger bestimmt. Aus diesen Gründen ist von der Mittelbildung abzuraten.

6 SPEZIELLE VERMITTELNDE AUSGLEICHUNGSMODELLE

Nachfolgend geben wir die Beobachtungsgleichungen für eine Reihe von häufig vorkommenden Ausgleichungsproblemen an und weisen ggf. auf Besonderheiten hin.

6.1 EINFACHE ANGESCHLOSSENE HÖHENNETZE

Wir betrachten nur Höhennetze, bei denen Punkte entweder unveränderliche Festpunkte mit fehlerfreien Sollhöhen oder unbekannte Neupunkte sind. (Ausgeschlossen sind also „bewegliche“ Festpunkte, deren bekannte Höhen mit ausgeglichen werden.) Angeschlossene Höhennetze enthalten mindestens einen Festpunkt.

Funktionales Modell: Beobachtungen sind gemessene Höhendifferenzen Δh . Parameter sind meist die Neupunkthöhen H . Die Beobachtungsgleichung für die Höhendifferenz zwischen zwei Neupunkten A und E lautet

$$\Delta \tilde{h}_{AE} = \tilde{H}_E - \tilde{H}_A$$

Ist ein Punkt A oder E ein Festpunkt, entfällt die Schlange über dem H . Eine gemessene Höhendifferenz zwischen zwei unveränderlichen Festpunkten kann nicht ausgeglichen werden, denn der wahre Wert ist nach Voraussetzung bekannt, kann aber zur Kontrolle der Festpunkthöhen dienen.

Näherungsparameter: Das Höhennetz wird durch Weglassen redundanter Beobachtungen ausgewertet.

Stochastisches Modell: Beim geometrischen Nivellement wird oft der Gewichtsansatz

$$p_i = 1\text{km}/R_i$$

mit der Länge R_i des Nivellementswegs gesetzt [7FKF, Abschnitt 2.2]. Somit ist σ_0 die Standardabweichung einer Höhendifferenz entlang eines 1km langen Nivellementswegs und wird auch als $\sigma_{1\text{km}}$ bezeichnet.

6.2 EDM-KALIBRIERUNG

Das Korrekturmodell des elektronischen Distanzmessers ist

$$e = m \cdot e' + a$$

e' ist die unkorrigierte Strecke, e ist die korrigierte Strecke, m ist der Maßstabsfaktor und a ist die Additionskonstante.

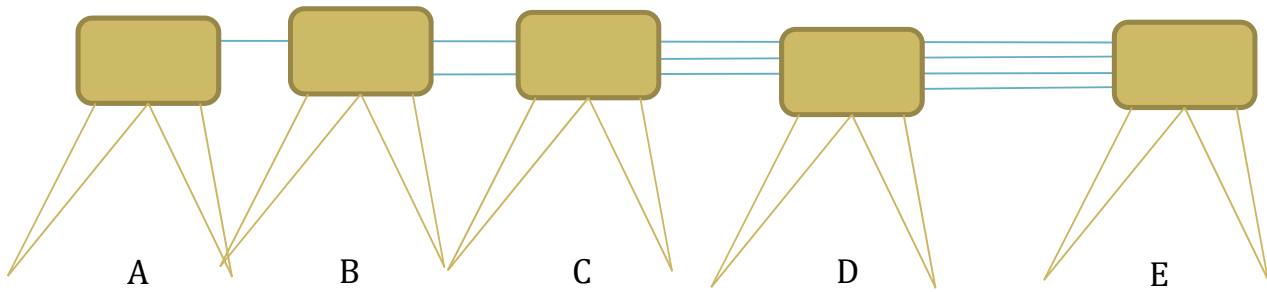


Abbildung: EDM-Kalibrierung

Zur Bestimmung von m und a eines EDM werden Punkte in einer Flucht abwechselnd mit EDM und Reflektor besetzt und Horizontalstrecken e' gemessen. Meist werden möglichst viele Kombinationen, oft alle Kombinationen gemessen.

Funktionales Modell: Beobachtungen sind die gemessenen unkorrigierten Horizontalstrecken e'_{AE} . Sind alle Abstände der gemessenen Punkte $e_{AE}^{Soll} = \tilde{e}_{AE}$ praktisch fehlerfrei bekannt (Sollstrecken), werden als Parameter die unbekannte Additionskonstante a und der unbekannte Maßstabsfaktor m des EDM gewählt. Somit ist $u = 2$.

Eine Beobachtungsgleichung für die Horizontalstrecke zwischen A und E lautet z.B.

$$\tilde{e}'_{AE} = e_{AE}^{Soll} / \tilde{m} - \tilde{a}$$

Sind die Abstände der gemessenen Punkte nicht bekannt, ist der Maßstabsfaktor nicht bestimmbar. Er muss bekannt und an den Beobachtungen schon angebracht worden sein. Parameter sind dann die Additionskonstante a und

- a) die Abstände benachbarter Punkte: $e_{AB}, e_{BC}, e_{CD}, \dots$ oder
- b) die Abstände der Punkte vom Anfangspunkt aus: $e_{AB}, e_{AC}, e_{AD}, \dots$

Eine Beobachtungsgleichung für die gemessene Horizontalstrecke e_{AE} zwischen A und E lautet für Variante a) z.B.

$$\tilde{e}'_{AE} = \tilde{e}_{AB} + \tilde{e}_{BC} + \tilde{e}_{CD} + \tilde{e}_{DE} - \tilde{a}$$

und für Variante b) z.B.

$$\tilde{e}'_{AE} = \tilde{e}_{AE} - \tilde{a}$$

Näherungsparameter: Man setzt am Besten $m^0 = 1$ und $a^0 = 0$ sowie $e_{AE}^0 = e_{AE}$.

Stochastisches Modell: Gewichte können meist für alle Beobachtungen gleich Eins gesetzt werden oder werden streckenabhängig gewählt: Längere Strecken erhalten dann niedrigere Gewichte.

6.3 AUSGLEICHENDE FUNKTIONEN MIT FEHLERFREIEN ABSZISSEN

Oft liegen Daten in Form einer **Wertetabelle** vor:

Abszissen	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	...	t_n
Ordinaten	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	...	L_n

Am einfachsten ist der hier vorliegende Fall, dass alle Abszissenwerte t_i als fehlerfreie Größen gelten können.

Anwendungen: L kann eine zeitlich veränderliche Messgröße sein, dann ist t der Messzeitpunkt. Bei Instrumentenkalibrierungen ist L_i der Messwert in Abhängigkeit von einem äußeren Einflussparameter t_i , z.B. der Temperatur. Auch können t_i, L_i die Koordinaten von gemessenen Punkten sein, durch die eine Gerade oder andere Kurve bestmöglich ausgleichend gerechnet werden soll, wobei nur die Ordinatenwerte L_i als fehlerhaft betrachtet werden.

Funktionales Modell: Die Ordinatenwerte L_i sind die Beobachtungen. Außerdem wird ein Modell des funktionalen Zusammenhangs $\tilde{L} = f(t)$ angenommen. Allerdings ist die Funktion f nicht vollständig bekannt, sonst könnte man \tilde{L}_i sofort fehlerfrei berechnen. Statt dessen hängt die Funktion f von unbekanntem Parametern X_1, \dots, X_u ab, z.B. in Form eines Polynoms vom Grad $u - 1$:

$$\tilde{L} = f(t) = \tilde{X}_1 + t \cdot \tilde{X}_2 + t^2 \cdot \tilde{X}_3 + \dots + t^{u-1} \cdot \tilde{X}_u$$

Beim einfachsten Modell ist $u = 2$, und $f(t)$ ist eine lineare Funktion. Dieses Modell nennt man die „Ausgleichende Gerade“.

Für jede Beobachtungsgleichung wird nun der zugehörige Abszissenwert t_i festgehalten und statt dessen die Abhängigkeit von den unbekanntem Parametern X_1, \dots, X_u in den Blickpunkt gerückt:

$$\tilde{L}_i = \varphi_i(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_u) = \tilde{X}_1 + t_i \cdot \tilde{X}_2 + t_i^2 \cdot \tilde{X}_3 + \dots + t_i^{u-1} \cdot \tilde{X}_u$$

Näherungsparameter: Die Parameter können durch Weglassen redundanter Beobachtungen in Form eines Gleichungssystems berechnet werden. Für das Polynom oder die meisten anderen ausgleichenden Funktionen wäre dieses Gleichungssystem sogar linear und deshalb leicht lösbar. Oft sind aufgabentypisch manche Parameter kleine Korrekturgrößen, die zur Vereinfachung näherungsweise mit Null angenommen werden können.

Stochastisches Modell: Hier gibt es keine Besonderheiten gegenüber Kapitel 2. Gewichte können oft für alle Beobachtungen gleich Eins gesetzt werden: $\mathbf{P} = \mathbf{I}$

6.4 TRANSFORMATIONEN MIT FEHLERFREIEN QUELLSYSTEMKOORDINATEN

Bei einer Transformationsaufgabe sind zunächst nur die Koordinaten der identischen Punkte, aus denen Transformationsparameter gerechnet werden sollen, für die Ausgleichung relevant. Am einfachsten ist der hier vorliegende Fall, dass alle Koordinaten eines der beiden Systeme als fehlerfrei betrachtet werden können. Dann erklärt man dieses System zum Quellsystem. Möchte man aber später Punkte in der entgegengesetzten Richtung transformieren, rechnet man die ausgeglichenen Transformationsparameter für die Rücktransformation um.

Funktionales Modell: Beobachtungen sind die Zielsystemkoordinaten $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_p, Y_p$. Die Quellsystemkoordinaten $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_p, y_p$ sind fehlerfreie Größen. Ausgleichungsparameter sind die Transformationsparameter, z.B. bei der **ebenen Helmert-Transformation** X_0, Y_0, o, a . Beobachtungsgleichungen sind die Transformationsgleichungen, hier:

$$\tilde{X}_i = \tilde{X}_0 + \tilde{a} \cdot x_i - \tilde{o} \cdot y_i$$

$$\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_0 + \tilde{o} \cdot x_i + \tilde{a} \cdot y_i$$

Näherungsparameter: Oft kann man aufgabentypisch einige Parameter näherungsweise angeben, z.B. Maßstäbe mit Eins oder Rotationswinkel mit Null. Bei der ebenen Helmert-Transformation kann man zwei identische Punkte herausgreifen und eine Ähnlichkeitstransformation mit diesen zwei identischen Punkten berechnen, wofür es direkte Formeln gibt. Bei anderen Transformationen kann man oft zunächst eine ähnliche, leichter zu berechnende Transformationsaufgabe lösen und die Parameter teilweise übernehmen. Z.B. kann der 3-Parameter-Transformation eine ebene Helmert-Transformation oder Ähnlichkeitstransformation mit zwei identischen Punkten vorgeschaltet werden. Danach wird der Maßstab, der ja nahezu mit Eins ermittelt worden sein müsste, weggelassen und die anderen drei Parameter werden als Näherungsparameter für die anschließende 3-Parameter-Transformation übernommen.

Stochastisches Modell: Es hängt davon ab, woher die Zielsystemkoordinaten stammen. Es könnte sogar sein, dass diese korreliert sind (↗Abschnitt 2.4). Ist die Kofaktormatrix nicht bekannt, müssen die Korrelationen vernachlässigt werden. Ist

nichts Belastbares über die Genauigkeiten der Zielsystemkoordinaten bekannt, sollten alle Gewichte gleich Eins gesetzt werden: $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Im Fall $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ steht bei der ebenen Helmert-Transformation und der ebenen Affin-Transformation jeweils ein **einfaches Rechenschema** zur Verfügung [↗Ebene, Abschnitt 6.8]. Man erhält damit allerdings keine vollständigen Kofaktormatrizen für die ausgeglichenen Größen und somit auch nicht alle Genauigkeits- und Zuverlässigkeitskenngrößen.

Transformation von Neupunkten: Möchte man schließlich Punkte vom Quellsystem ins Zielsystem umrechnen, benutzt man dafür die ausgeglichenen Parameter, z.B. $\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{o}, \hat{a}$. Die Neupunktkoordinaten sind damit Funktionen ausgeglichener Parameter. Zur Berechnung von deren Standardabweichungen oder Fehlerellipsen (↗Abschnitt 4.5) muss man das Kofaktorfortpflanzungsgesetz anwenden (↗Abschnitt 4.2).

Rücktransformation: Möchte man auch oder nur Punkte vom Zielsystem ins Quellsystem umrechnen, benötigt man die Parameter der Rücktransformation, z.B. bei der ebenen Helmert-Transformation (↗Ebene Abschnitt 6.8)

$$A = \frac{a}{a^2 + o^2}, \quad O = -\frac{o}{a^2 + o^2}, \quad y_0 = -X_0 \cdot O - Y_0 \cdot A, \quad x_0 = -X_0 \cdot A + Y_0 \cdot O$$

Man berechnet diese mit ausgeglichenen Parametern $\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{o}, \hat{a}$, so dass die Parameter x_0, y_0, O, A wieder Funktionen ausgeglichener Parameter sind. Die Neupunkte transformiert man dann mit

$$\begin{aligned} y &= y_0 + X \cdot O + Y \cdot A \\ x &= x_0 + X \cdot A - Y \cdot O \end{aligned}$$

Zur Berechnung von deren Standardabweichungen oder Fehlerellipsen muss man das Kofaktorfortpflanzungsgesetz **zweimal** anwenden, einmal auf die Berechnung der Parameter der Rücktransformation und dann nochmals auf die Rücktransformation selbst.

6.5 VOLL ANGESCHLOSSENE LAGENETZE

Wir betrachten nur Lagenetze, bei denen Punkte entweder unveränderliche Festpunkte mit fehlerfreien Sollkoordinaten oder unbekannte Neupunkte sind. (Ausgeschlossen sind also „bewegliche“ Festpunkte, deren bekannte Koordinaten mit ausgeglichen werden.) Voll angeschlossene Lagenetze enthalten mindestens zwei Festpunkte.

Funktionales Modell: Beobachtungen sind Horizontalrichtungen r_{AE}, \dots und/oder Horizontalstrecken e_{AE}, \dots . Parameter sind Neupunktkoordinaten X_N, Y_N, \dots und

Orientierungswinkel des Teilkreises α_A, \dots (Richtungswinkel von Teilkreisnull) auf jedem Punkt, auf dem Richtungen gemessen wurden. Bei größeren Netzen könnte man noch einen Maßstabsparameter m hinzufügen, sollte das Verhältnis von EDM-Maßstab und in den Anschlusspunkten verankertem Netzmaßstab nicht fehlerfrei bekannt sein.

Hinweis: Im 20. Jh gab es oft Probleme mit den EDM- und Netzmaßstäben. In der modernen Vermessung ist der Maßstab oft bekannt, z.B. aus einer EDM-Kalibrierung und der atmosphärischen Korrektion.

Die **Beobachtungsgleichung für die Horizontalrichtung** r_{AE} vom Standpunkt A zum Zielpunkt E lautet, wenn A und E Neupunkte sind:

$$\tilde{r}_{AE} = \arctan\left(\frac{\tilde{Y}_E - \tilde{Y}_A}{\tilde{X}_E - \tilde{X}_A}\right) - \tilde{\alpha}_A$$

Sind Punkt A und/oder E Festpunkte, entfällt jeweils die Schlange über den zugehörigen Koordinaten.

Die **Beobachtungsgleichung für eine Horizontalstrecke** e_{AE} zwischen den Neupunkten A und E lautet ohne Maßstabsparameter

$$\tilde{e}_{AE} = \sqrt{(\tilde{Y}_E - \tilde{Y}_A)^2 + (\tilde{X}_E - \tilde{X}_A)^2}$$

und mit Maßstabsparameter m

$$\tilde{e}_{AE} = \frac{1}{\tilde{m}} \sqrt{(\tilde{Y}_E - \tilde{Y}_A)^2 + (\tilde{X}_E - \tilde{X}_A)^2}$$

Ist hingegen ein Punkt A oder E ein Festpunkt, entfällt die Schlange über den zugehörigen Koordinaten. Eine gemessene Strecke zwischen zwei unveränderlichen Festpunkten kann ohne Maßstabsparameter nicht ausgeglichen werden, denn der wahre Wert ist nach Voraussetzung bekannt, kann aber vor der Ausgleichung zur Kontrolle der Festpunktkoordinaten dienen.

Näherungsparameter: Neupunktkoordinaten werden über Polarpunktberechnung oder geodätische Schnitte berechnet. Orientierungswinkel werden über Stationsabrisse berechnet, auch mit Näherungskordinaten. Der Näherungswert für den Maßstab ist normalerweise $m^0 = 1$.

Hinweis: In diese Stationsabrisse müssen nicht unbedingt alle Punkte einbezogen werden, wenn das sehr viele sind. Es geht zunächst nur um Näherungswerte, so dass einige Vereinfachungen erlaubt sind.

Die **linearisierte Verbesserungsgleichung für die Horizontalrichtung** r_{AE} vom Standpunkt A zum Zielpunkt E lautet, wenn A und E Neupunkte sind:

$$\begin{aligned}
l_i + v_i &= \rho \frac{X_E^0 - X_A^0}{(e_{AE}^0)^2} \widehat{dy}_E - \rho \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{(e_{AE}^0)^2} \widehat{dx}_E - \rho \frac{X_E^0 - X_A^0}{(e_{AE}^0)^2} \widehat{dy}_A + \rho \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{(e_{AE}^0)^2} \widehat{dx}_A - \widehat{do}_A \\
&= \rho \frac{\cos t_{AE}^0}{e_{AE}^0} \widehat{dy}_E - \rho \frac{\sin t_{AE}^0}{e_{AE}^0} \widehat{dx}_E - \rho \frac{\cos t_{AE}^0}{e_{AE}^0} \widehat{dy}_A + \rho \frac{\sin t_{AE}^0}{e_{AE}^0} \widehat{dx}_A - \widehat{do}_A, \\
\rho &= 200gon/\pi
\end{aligned}$$

Die **linearisierte Verbesserungsgleichung für eine Horizontalstrecke** e_{AE} zwischen den Neupunkten A und E lautet ohne Maßstabsparameter

$$\begin{aligned}
l_i + v_i &= \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{e_{AE}^0} \widehat{dy}_E + \frac{X_E^0 - X_A^0}{e_{AE}^0} \widehat{dx}_E - \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{e_{AE}^0} \widehat{dy}_A - \frac{X_E^0 - X_A^0}{e_{AE}^0} \widehat{dx}_A \\
&= \sin t_{AE}^0 \widehat{dy}_E + \cos t_{AE}^0 \widehat{dx}_E - \sin t_{AE}^0 \widehat{dy}_A - \cos t_{AE}^0 \widehat{dx}_A
\end{aligned}$$

und mit Maßstabsparameter m

$$\begin{aligned}
l_i + v_i &= \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{m^0 e_{AE}^0} \widehat{dy}_E + \frac{X_E^0 - X_A^0}{m^0 e_{AE}^0} \widehat{dx}_E - \frac{Y_E^0 - Y_A^0}{m^0 e_{AE}^0} \widehat{dy}_A - \frac{X_E^0 - X_A^0}{m^0 e_{AE}^0} \widehat{dx}_A - \frac{e_{AE}^0}{(m^0)^2} \widehat{dm} \\
&= \frac{\sin t_{AE}^0}{m^0} \widehat{dy}_E + \frac{\cos t_{AE}^0}{m^0} \widehat{dx}_E - \frac{\sin t_{AE}^0}{m^0} \widehat{dy}_A - \frac{\cos t_{AE}^0}{m^0} \widehat{dx}_A - \frac{e_{AE}^0}{(m^0)^2} \widehat{dm}
\end{aligned}$$

dy, dx, do, dm sind die gekürzten Parameter im Vektor \mathbf{x} . Die Faktoren davor einschließlich Vorzeichen sind jeweils die Elemente der \mathbf{A} -Matrix. Wenn A ein Festpunkt ist, wird $dy_A = dx_A = 0, X_A^0 = X_A, Y_A^0 = Y_A$ gesetzt. Wenn E ein Festpunkt ist, wird $dy_E = dx_E = 0, X_E^0 = X_E, Y_E^0 = Y_E$ gesetzt. t_{AE}^0, e_{AE}^0 sind die aus Näherungskordinaten oder aus Festpunktkordinaten berechneten Richtungswinkel und Horizontalstrecken von A nach E.

Stochastisches Modell: Liegen nur Richtungen oder nur Strecken vor, kommt auch der Fall aus Abschnitt 2.2 in Frage, sonst nur entweder der Fall aus Abschnitt 2.1 oder 2.3, denn eine relative Genauigkeit in Form eines Verhältnisses $\sigma_r : \sigma_e$ ist sinnlos. Die Genauigkeiten ergeben sich aus Geräteherstellerangaben oder besser noch aus eingehenden Geräteuntersuchungen. Oft wird die Netzausgleichung nicht mit den ursprünglich gemessenen Richtungen durchgeführt, sondern mit Satzmitteln. Dann muss die Satzanzahl n für Richtungssätze über die bekannte Formel σ_r / \sqrt{n} [FKF, Beispiel 4] berücksichtigt werden. Beachten Sie hierzu auch Abschnitt 5.6.

7 ALLGEMEINFALL DER AUSGLEICHUNG

7.1 RÜCKFÜHRUNG AUF DAS VERMITTELNDE AUSGLEICHUNGSMODELL

Manchmal ist es nicht möglich, den Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Parametern in der Form $\tilde{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{X}})$ anzugeben, sondern nur in der Form

$$\boldsymbol{\Phi}(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}$$

wobei dieses Gleichungssystem nur $n_a < n$ Gleichungen enthält und deshalb nicht vollständig nach $\tilde{\mathbf{L}}$ aufgelöst werden kann. Dieses Modell wird als „Allgemeinfall der Ausgleichung“ oder „Gauß-Helmert-Modell“ oder auch „Total Least Squares“ bezeichnet.

Es gibt aber fast immer eine einfache Möglichkeit, dieses Modell auf das vermittelnde Ausgleichungsmodell zurückzuführen. Voraussetzung ist, dass in jeder Beobachtungsgleichung mindestens eine Beobachtung vorhanden ist, die in keiner anderen Beobachtungsgleichung vorkommt. Dann geht man wie folgt vor:

1. Die oben genannten n_a Beobachtungen werden zu einem Vektor \mathbf{L}_a zusammengestellt und die restlichen $n_b = n - n_a$ Beobachtungen zu einem Vektor \mathbf{L}_b .
2. Man löst das Gleichungssystem $\boldsymbol{\Phi}(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}$ nach \mathbf{L}_a auf und erhält:
$$\tilde{\mathbf{L}}_a = \boldsymbol{\varphi}_a(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{L}}_b)$$
3. Man erklärt \mathbf{L}_b gleichzeitig zu Hilfsparametern $\mathbf{X}_b = \mathbf{L}_b$.
4. Man erweitert das Beobachtungsgleichungssystem um n_b Gleichungen für die Beobachtungen \mathbf{L}_b , die von sehr einfacher Form sind:

$$\tilde{\mathbf{L}}_b = \boldsymbol{\varphi}_b(\tilde{\mathbf{X}}_b) = \tilde{\mathbf{X}}_b$$

Damit haben wir wieder ein System von $n_a + n_b = n$ Beobachtungsgleichungen der Form $\tilde{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{X}})$ erhalten, das wir mit den Werkzeugen der vermittelnden Ausgleichung lösen können. Es enthält jetzt n_b zusätzliche Parameter.

7.2 AUSGLEICHENDE GERADE MIT FEHLERHAFTEN ABSZISSEN

Betrachten wir als Beispiel das Modell der ausgleichenden Gerade durch N Punkte aus Abschnitt 6.3:

$$\tilde{L}_i = \tilde{X}_1 + t_i \cdot \tilde{X}_2, \quad i = 1, \dots, N$$

Jedoch sollen jetzt im Unterschied zu Abschnitt 6.3 auch t_1, \dots, t_N Beobachtungen sein. Also formulieren wir die Beobachtungsgleichungen um:

$$\tilde{L}_{a,i} = \tilde{X}_1 + \tilde{L}_{b,i} \cdot \tilde{X}_2, \quad i = 1, \dots, N$$

$L_{a,1}, \dots, L_{a,N}$ sind die Ordinaten und $L_{b,1}, \dots, L_{b,N}$ sind die Abszissen, wobei diese Zuordnung jetzt beliebig getauscht werden kann. $L_{b,1}, \dots, L_{b,N}$ erklären wir gleichzeitig zu Hilfsparametern $\tilde{X}_3, \dots, \tilde{X}_{2+N}$, so dass jeweils eine neue Beobachtungsgleichung entsteht:

$$\tilde{L}_{a,i} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_{2+i} \cdot \tilde{X}_2, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\tilde{L}_{b,i} = \tilde{X}_{2+i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Dieses System von $n = 2N$ Beobachtungsgleichungen ist korrekt im Sinne der vermittelnden Ausgleichung formuliert und kann wie in den Kapiteln 1-5 dieses Manuskripts beschrieben gelöst werden. Es enthält jetzt aber doppelt so viele Beobachtungsgleichungen und für jeden Punkt einen zusätzlichen Parameter.

Näherungsparameter: Zunächst kann man näherungsweise die Abszissen als fehlerfrei annehmen und eine ausgleichende Gerade wie in Abschnitt 6.3 berechnen. Das Ergebnis setzen wir für X_1^0 und X_2^0 ein. Die Hilfsparameter $\tilde{X}_3, \dots, \tilde{X}_{2+N}$ setzen wir näherungsweise gleich den Werten der gemessenen Abszissen:

$$X_{2+i}^0 := \tilde{L}_{b,i}, \quad i = 1, \dots, N$$

A-Matrix: Werden die Beobachtungen in der Reihenfolge $L_{a,1}, \dots, L_{a,N}, L_{b,1}, \dots, L_{b,N}$ angeordnet, ergibt sich folgende **A**-Matrix.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & X_3^0 & X_2^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2+N}^0 & 0 & \dots & X_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Schlussprobe: Wir haben nichtlineare vermittelnde Funktionen φ_a , weshalb eine Schlussprobe unerlässlich ist. Wie üblich setzen wir die ausgeglichenen Parameter und die ausgeglichenen Beobachtungen in die Beobachtungsgleichungen ein und überprüfen, dass gilt:

$$\hat{L}_{a,i} = \hat{X}_1 + \hat{X}_{2+i} \cdot \hat{X}_2, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\hat{L}_{b,i} = \hat{X}_{2+i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Die ersten N Gleichungen stellen sicher, dass die ausgeglichenen Punkte auf der berechneten ausgleichenden Geraden liegen, die zweiten N Gleichungen kontrollieren, dass die Abszissen und die Hilfsparameter mit denselben Schätzwerten erhalten wurden, denn es sind ja dieselben Größen.

7.3 WEITERE ANWENDUNGEN

Bei **geodätischen Netzen** kommt es vor, dass Anschlusspunktkoordinaten nicht als fehlerfrei anzunehmen sind, sondern auch Verbesserungen benötigen. Diese werden dann als Beobachtungen L_b und gleichzeitig Hilfsparameter $X_b = L_b$ aufgefasst.

Bei **Transformationen** kann es nötig sein, die Koordinaten beider Systeme als Beobachtungen zu behandeln. Es ist dann nicht möglich, die Quellsystemkoordinaten als fehlerfrei anzunehmen, wie in Abschnitt 6.4 vorausgesetzt. Hier sind die Quellsystemkoordinaten als Beobachtungen L_b und gleichzeitig Hilfsparameter $X_b = L_b$ anzusetzen.

Weitere Beispiele und Aufgaben zum Thema „Allgemeinfall der Ausgleichung“ bei ausgleichenden Funktionen finden Sie im Teil 2 dieses Manuskripts:

- Rechteck durch 8 Punkte
- Ausgleichende Gerade
- Ausgleichende Kugel

Speziell im Beispiel „Ausgleichende Kugel“ sehen Sie, dass die Auflösung der Gleichungen $\Phi(\tilde{L}, \tilde{X}) = \mathbf{0}$ nach Beobachtungen manchmal schwer oder gar nicht möglich ist, und was dann zu tun ist.

8 SCHLUSS

Die Ausgleichsrechnung ist das **universelle Werkzeug** zur Auswertung redundanter geodätischer Messungen. Es wird

- in allen Bereichen der Wissenschaft und der Berufspraxis,
- in der Katastervermessung wie in der Ingenieurgeodäsie,
- bei satellitengestützten, flugzeuggestützten und terrestrischen Messungen

angewendet. Leider mussten in diesem einführenden Text viele wichtige Bereiche ausgeklammert werden, nämlich:

- robuste Verfahren, die auch bei fehlerhaftem Ausgleichsmodell noch akzeptable Ergebnisse liefern
- korrelierte Beobachtungen (nur erwähnt in Abschnitt 2.4)
- Varianzkomponentenschätzung (nur erwähnt in Abschnitt 2.3)
- Ausgleichung mit Datumdefekt (Normalgleichungsmatrix ist singulär)
- Deformationsanalyse (Vergleich von Messepochen)
- dreidimensionale und integrierte Modelle (bei denen geometrische und gravimetrische Daten werden gemeinsam ausgeglichen werden)
- satellitengeodätische Ausgleichungsmodelle (z.B. zur Satellitenbahnberechnung)
- Optimalfilterung

und vieles mehr.

Einiges davon kann mit der geodätischen Cloud Computing Software IN DUBIO PRO GEO schon jetzt oder in naher Zukunft bearbeitet werden:



<http://www.in-dubio-pro-geo.de>

LITERATUR

- Gruber, F. J.; Joeckel, R.: Formelsammlung für das Vermessungswesen. 20. Auflage, Stuttgart-Leipzig: Vieweg+Teubner Verlag, 2020.
- [Ebene] Lehmann, R: Ebene geodätische Berechnungen. Internes Manuskript, Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden 2014.
<http://www.in-dubio-pro-geo.de/index.php?file=script/ebene>
- [GMabw] Lehmann, R: Geodätische Messabweichungen. Internes Manuskript, Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden 2016.
- [FKF] Lehmann, R: Fehler- und Kovarianzfortpflanzung. Internes Manuskript, Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden 2019.
<http://www.in-dubio-pro-geo.de/index.php?file=script/fkf>
- [VAus2] Lehmann, R: Vermittelnden Ausgleichsrechnung. Teil 2: Beispiele und Aufgaben. Internes Manuskript, Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden 2020.
<http://www.in-dubio-pro-geo.de/index.php?file=script/vaus>
- [VAus3] Lehmann, R: Vermittelnden Ausgleichsrechnung. Teil 3: Formeln und Übersichten. Internes Manuskript, Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden 2020.
<http://www.in-dubio-pro-geo.de/index.php?file=script/vaus>