

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

**Fakultät Geoinformation**



**Internes Manuskript**

# **Geodätische Berechnungen**

Lehmann, R.

## **Räumliche Geodätische Berechnungen**

Dresden, Dezember 2018

FV-05-01.2-1

Herausgeber:

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden  
Fakultät Geoinformation  
Friedrich-List-Platz 1  
01069 Dresden

Autor:

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann  
Professor für Vermessungstechnik und Instrumententechnik an der  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

1. Auflage: Dezember 2018

Als Manuskript gedruckt.

Alle Rechte vorbehalten.

Druck und buchbinderische Verarbeitung:  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

# INHALT

0	Vorwort.....	3
1	Räumliche Koordinatensysteme .....	5
1.1	Arten von räumlichen Koordinatensystemen .....	5
1.2	Umrechnung zwischen polaren und kartesischen Koordinaten.....	7
2	Grundelemente der räumlichen Geometrie .....	9
2.1	Wichtige Grundaufgaben der räumlichen Geometrie .....	9
2.2	Anwendung: Kugel durch vier Punkte .....	12
3	Räumliche geodätische Schnitte.....	14
3.1	Kugelschnitt (Trisphäreration) .....	14
4	Räumliche Transformationen .....	18
4.1	Elementare Transformationsschritte.....	18
4.2	Räumliche Rotationen.....	19
4.3	Infinitesimale räumliche Rotationen.....	22
4.4	Räumliche Transvektionen.....	23
4.5	Infinitesimale räumliche Transvektionen .....	25
4.6	Die räumliche Helmert-Transformation .....	25
4.7	Die Sechs-Parameter-Transformation .....	30
4.8	Die räumliche Affin-Transformation .....	30
4.9	Anwendung: Zylinder durch sieben Punkte .....	31
5	Lösungen .....	37

## 0 VORWORT

Dieses Manuskript entstand aus Vorlesungen über Geodätische Berechnungen an der Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden. Da diese Lehrveranstaltung im ersten Semester stattfindet, werden noch keine Methoden der höheren Mathematik benutzt.

Bei der Bearbeitung Geodätischer Berechnungen werden **Rechenproben** dringend empfohlen, um Fehler aller Art aufzudecken:

- falsche Lösungswege
- falsch benutzte Formeln
- Tippfehler auf dem Taschenrechner
- Programmierfehler usw.

Dabei sollte man darauf achten, dass eine Rechenprobe möglichst effektiv ist, d.h. möglichst alle denkbaren Fehler aufdeckt. Das ist nur der Fall, wenn man nicht auf Zwischenergebnisse aus der Lösung zurückgreift, die ihrerseits schon falsch sein können. Häufig kann man die Ausgangsgrößen aus den Ergebnissen zurückrechnen. Leider gibt es auch einige Fälle, in denen keine effektive Probe möglich ist.

Die **Winkleinheit** Gon ist weiterhin im Vermessungswesen verbreitet und in Deutschland eine gesetzliche Einheit im Messwesen, aber keine SI-Einheit. Gon wurde früher Neugrad genannt. Ein Gon ist definiert als der vierhundertste Teil des Vollwinkels, d. h.  $1 \text{ Vollwinkel} = 400 \text{ gon}$ . Einige Rechenoperationen sind in Gon übersichtlicher ausführbar, andere nicht. Insbesondere die häufig in der Geometrie auftretenden Winkel  $30^\circ$  und  $60^\circ$  sind in Gon periodische Dezimalbrüche.

Die Lösungen zu den Aufgaben charakterisieren den Lösungsweg mit dem **Taschenrechner**, wobei nur die aufgeschriebenen Stellen mitgeführt werden. Dadurch ergeben sich bei den Proben kleine Abweichungen. Ist dies unerwünscht, weil eine höhere Genauigkeit verlangt ist, müssen mehr Stellen mitgeführt werden.



IN DUBIO PRO GEO ist eine Cloud Computing Software für Geodätische Berechnungen und Ausgleichsrechnung. Viele der in diesem Manuskript behandelten Berechnungen können damit durchgeführt werden. Für einige Beispiele und Aufgaben sind außerdem vorgefertigte **IN DUBIO PRO GEO** Projekte verfügbar. Diese Projekte erreicht man mit den unter den Beispielen und Aufgaben angegebenen Links der Form (XX=zweistellige Nummer

des Beispiels oder der Aufgabe):

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-beispielXX>

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-aufgabeXX>

Eine Übersicht über diese Beispiele und Aufgaben findet man hier:

<http://www.in-dubio-pro-geo.de?file=script/raum>

Ich danke allen Studierenden der HTW Dresden, die mir halfen, Fehler in diesem Manuskript zu beseitigen. Sollten dennoch Fehler verblieben sein, bitte ich um Mitteilung an [r.lehmann@htw-dresden.de](mailto:r.lehmann@htw-dresden.de)

R. Lehmann, November 2018


# 1 RÄUMLICHE KOORDINATENSYSTEME

## 1.1 ARTEN VON RÄUMLICHEN KOORDINATENSYSTEMEN

Bei kartesischen Koordinatensystemen unterscheidet man zwischen **Links- und Rechtssystemen**. Bei räumlichen Systemen gilt folgende Regel: Daumen (X), Zeigefinger (Y) und Mittelfinger (Z) der linken Hand spannen ein Linkssystem auf, dieselben Finger der rechten Hand ein Rechtssystem (↗ Abbildung 1). Man nennt diese Systeme auch **linkshändig** und **rechtshändig**.

Außerdem gibt es im Wesentlichen **geozentrische und topozentrische Systeme**, bei denen der Koordinatenursprung entweder im Geozentrum (eine Art Erdmittelpunkt) oder im Topozentrum (Punkt nahe der Erdoberfläche, z.B. Mittelpunkt des Aufnahmeinstrumentes) liegt.

Geozentrische Systeme sind in der Geodäsie meist Rechtssysteme und topozentrische Systeme sind oft Linkssysteme.

 *Hier gibt es viele Ausnahmefälle und Sonderregelungen. Überzeugen Sie sich zunächst von der Art des Koordinatensystems, mit dem Sie es zu tun haben.*

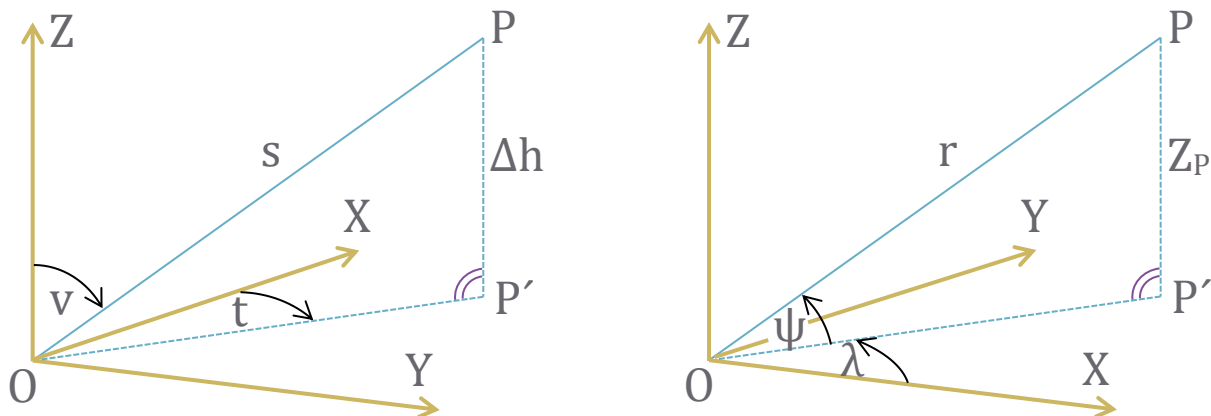


**Abbildung 1:** Kartesisches Linkssystem (links) und Rechtssystem (rechts)

Tabelle 1 zeigt zwei wichtige Typen räumlicher kartesischer Koordinatensysteme. Das dort dargestellte topozentrische Linkssystem wird auch verkürzt mit **NEU (North-East-Up)** gekennzeichnet. Manchmal verwendet man aber auch das topozentrische Rechtssystem **ENU (East-North-Up)**. Präzisere Definitionen dieser Systeme sind Gegenstand der Landesvermessung und Erdmessung.

**Tabelle 1:** Zwei Typen räumlicher kartesischer Koordinatensysteme

	<b>Geozentrisches Rechtssystem</b>	<b>Topozentrisches Linkssystem</b>
Koordinatenursprung	Modell des Erdmittelpunktes (Geozentrum)	irgendein Punkt nahe der Erdoberfläche (Topozentrum), z.B. Mittelpunkt des Aufnahmeinstrumentes
Z-Achse	Modell der Erdrotationsachse, nach Nord (Austrittspunkt aus dem Erdkörper: Nordpol)	lokale Lotgerade, zum Zenit (d.h. nach oben)
X-Achse	in der Meridianebene von Greenwich (Austrittspunkt aus dem Erdkörper: Golf von Guinea)	lokale Nordrichtung
Y-Achse	ergänzt zum Rechtssystem (Austrittspunkt aus dem Erdkörper: östlich von Sumatra)	lokale Ostrichtung



**Abbildung 2:** Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten im topozentrischen Linkssystem (links) und im geozentrischen Rechtssystem (rechts)

Auch mit polaren Koordinaten können räumliche Punkte beschrieben werden. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten (↗ Abbildung 2):

1. im topozentrischen Linkssystem
  - a. Kugelkoordinaten: Schrägstrecke  $s$ , Richtungswinkel  $t$ , Zenitwinkel  $v$
  - b. Zylinderkoordinaten: mit Höhendifferenz  $\Delta h$  statt  $v$
2. im geozentrischen Rechtssystem
  - a. Kugelkoordinaten: geozentrischer Abstand  $r$ , ellipsoidische Länge  $\lambda$ , geozentrische Breite  $\psi$

- b. Zylinderkoordinaten: mit Koordinate  $Z_P$  statt  $\psi$  (praktisch nicht gebräuchlich)
- c. ellipsoidische Koordinaten: ellipsoidische Breite  $\varphi$ , ellipsoidische Länge  $\lambda$ , ellipsoidische Höhe  $h$  (Diese Koordinaten werden im vorliegenden Manuskript nicht weiter besprochen.)

## 1.2 UMRECHNUNG ZWISCHEN POLAREN UND KARTESISCHEN KOORDINATEN

Mit folgenden Formeln können die polaren Koordinaten  $s, t, v$  und kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  im topozentrischen Linkssystem ineinander umgerechnet werden:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s \cdot \cos t \cdot \sin v \\ y &= y_0 + s \cdot \sin t \cdot \sin v \\ z &= z_0 + s \cdot \cos v \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$t = \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$v = \operatorname{arccot} \frac{z - z_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$x_0, y_0, z_0$  sind die Koordinaten des Pols O, welche nicht immer mit Null festgelegt sind.

**Beispiel 1:** In einer geneigten Ebene wurden von Tachymeterstandpunkt S aus vier Punkte A,B,C,P gemessen:

Zielpunkt	Hz-Richtung [gon]	Zenitwinkel [gon]	Schrägstrecke [m]
A	0,00	90,68	17,11
B	16,10	95,92	27,45
C	23,06	96,34	29,34
P	43,37	93,35	---

Die Schrägstrecke AB sowie Richtungs- und Neigungswinkel von AB sollen bestimmt werden. (Die anderen Zielpunkte werden in Aufgabe 1 und Beispiel 2-5 benutzt.)

**Lösung:** Ein topozentrisches kartesisches Linkssystem mit Ursprung im Punkt S und X-Achse in Hz-Nullrichtung wird festgelegt. Dann sind die Hz-Richtungen gleichzeitig Richtungswinkel  $t$ . Dem Punkt S sollen die Koordinaten ( $x_S=y_S=z_S=100,000$ ) zugeordnet werden, um negative Koordinaten zu vermeiden. Folgende kartesischen Zielpunktkoordinaten in Meter werden erhalten:

$$\begin{aligned} x_A &= 100,000 + 17,11 \cdot \cos(0,00) \cdot \sin(90,68) &= 116,927 \\ y_A &= 100,000 + 17,11 \cdot \sin(0,00) \cdot \sin(90,68) &= 100,000 \\ z_A &= 100,000 + 17,11 \cdot \cos(90,68) &= 102,496 \\ x_B &= 100,000 + 27,45 \cdot \cos(16,10) \cdot \sin(95,92) &= 126,522 \\ y_B &= 100,000 + 27,45 \cdot \sin(16,10) \cdot \sin(95,92) &= 106,854 \end{aligned}$$



$$z_B = 100,000 + 27,45 \cdot \cos(95,92) = 101,758$$


Die gesuchten Größen sind nun die Kugelkoordinaten von B vom Ursprung A aus gesehen:

$$s_{AB} = \sqrt{(126,522 - 116,927)^2 + (106,854 - 100,000)^2 + (101,758 - 102,496)^2} \\ = 11,815 \text{ m}$$


$$t_{AB} = \arctan\left(\frac{106,854 - 100,000}{126,522 - 116,927}\right) = \underline{39,488 \text{ gon}}$$

$$v_{AB} = \operatorname{arccot} \frac{101,758 - 102,496}{\sqrt{(126,522 - 116,927)^2 + (106,854 - 100,000)^2}} = \underline{103,979 \text{ gon}}$$

Der Neigungswinkel von AB beträgt also -3,979 gon, d.h. von A nach B abfallend.

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-beispiel01>

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie in Beispiel 1 die Schrägstrecke AC und den Neigungswinkel von AC.

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-aufgabe01>

## 2 GRUNDELEMENTE DER RÄUMLICHEN GEOMETRIE

Frischen Sie notfalls Ihre Kenntnisse über räumliche Geometrie und Vektorrechnung aus der Mathematik auf.  $\vec{v}$  bezeichnet im Folgenden immer einen Ortsvektor, das ist ein Vektor vom Koordinatenursprung zum Punkt, dessen Komponenten die Koordinaten dieses Punktes sind.

### 2.1 WICHTIGE GRUNDAUFGABEN DER RÄUMLICHEN GEOMETRIE

Mit den Grundformeln der räumlichen Geometrie

$$\begin{aligned} \text{Geradengleichung:} \quad \vec{v} &= \vec{v}_0 + \tau \cdot \vec{g} \\ \tau &= \text{Geradenparameter, } \vec{g} = \text{Geradenvektor} \end{aligned}$$

$$\text{Ebenengleichung:} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = d$$

$$\text{Normalenvektor:} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

finden Sie in Tabelle 2 die wichtigsten Grundaufgaben der räumlichen Geometrie zusammengestellt.

**Beispiel 2:** Mit den Messwerten aus Beispiel 1 soll der Abstand des Punktes C von der Geraden AB bestimmt werden.

**Lösung:** Mit dem Geradenvektor der Geraden AB

$$\vec{g} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \begin{pmatrix} 9,595 \\ 6,854 \\ -0,738 \end{pmatrix}, |\vec{g}| = 11,815$$

erhalten wir mit der Formel aus Tabelle 2 den gesuchten Abstand:

$$\sqrt{(\vec{v}_C - \vec{v}_A)^2 - \left( \frac{(\vec{v}_C - \vec{v}_A) \cdot \vec{g}}{|\vec{g}|} \right)^2} = \sqrt{14,761^2 - 14,570^2} = \underline{\underline{2,366 \text{ m}}}$$

**Tabelle 2:** Überblick über Grundaufgaben der räumlichen Geometrie ( $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ =Ebenen,  $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ =Geraden,  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ =Punkte).  $\vec{n}$  und  $\vec{g}$  können beliebige Längen haben.

$\mathcal{G}$ durch $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$	$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\mathcal{P}}, \quad \vec{g} = \vec{v}_{\mathcal{Q}} - \vec{v}_{\mathcal{P}}$
$\mathcal{E}$ durch $\mathcal{G}, \mathcal{P}$	$\vec{n} = (\vec{v}_{\mathcal{P}} - \vec{v}_0) \times \vec{g}, \quad d = \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{P}}$
$\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P}$ und $\perp \mathcal{G}$	$\vec{n} = \vec{g}, \quad d = \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{P}}$
$\mathcal{E}$ durch $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$	$\vec{n} = (\vec{v}_{\mathcal{Q}} - \vec{v}_{\mathcal{P}}) \times (\vec{v}_{\mathcal{R}} - \vec{v}_{\mathcal{P}}), \quad d = \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{P}} = \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{Q}} = \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}}$
$\mathcal{E} \parallel \mathcal{E}'$ durch $\mathcal{P}$	$\vec{n} = \vec{n}', \quad d = \vec{n} \cdot \vec{r}_{\mathcal{P}}$
Abstand( $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ )	$ \vec{v}_{\mathcal{Q}} - \vec{v}_{\mathcal{P}} $ („Räumlicher Pythagoras“)
Abstand( $\mathcal{P}, \mathcal{G}$ )	$\sqrt{(\vec{v}_{\mathcal{P}} - \vec{v}_0)^2 - \left(\frac{(\vec{v}_{\mathcal{P}} - \vec{v}_0) \cdot \vec{g}}{ \vec{g} }\right)^2}$
Abstand( $\mathcal{P}, \mathcal{E}$ )	$ \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{P}} - d / \vec{n} $
Schnitt( $\mathcal{G}, \mathcal{E}$ )	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{v}_0}{\vec{n} \cdot \vec{g}} \cdot \vec{g}$
Schnitt( $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ )	$\vec{g} = \vec{n} \times \vec{n}', \quad \vec{v}_0 = N^T (NN^T)^{-1} \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ n'_x & n'_y & n'_z \end{pmatrix}$
Neigung( $\mathcal{E}$ )	Neigungswinkel = $\arccos(n_z/ \vec{n} )$
Falllinie( $\mathcal{E}$ )	Richtungswinkel = $\arctan(n_y/n_x)$ , $\vec{n}$ zeigt nach oben, d.h. $n_z > 0$
Projektion $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$	$\vec{v}_{\mathcal{Q}} = \vec{v}_{\mathcal{P}} + (d - \vec{n} \cdot \vec{v}_{\mathcal{P}}) \vec{n} ^{-2} \cdot \vec{n}$
$\mathcal{G}' \perp \mathcal{G}$ und $\mathcal{G}' \parallel \mathcal{E}$	$\vec{g}' = \vec{n} \times \vec{g}$



In einigen Sonderfällen ist keine oder keine eindeutige Lösung möglich.

**Beispiel 3:** Mit den Messwerten aus Beispiel 1 sollen die polaren Absteckwerte eines Punktes D von S aus auf der Geraden AB bestimmt werden, der von A genau 5,000 m in Richtung von B entfernt ist.

**Lösung:** D hat die kartesischen Koordinaten

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + 5,000 \cdot \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} = \begin{pmatrix} 120,988 \\ 102,901 \\ 102,184 \end{pmatrix}$$

Diese lassen sich mit den Formeln aus Abschnitt 1.2 in Kugelkoordinaten umrechnen:

$$s_{SD} = \sqrt{(x_D - x_S)^2 + (y_D - y_S)^2 + (z_D - z_S)^2}$$

$$= \sqrt{20,988^2 + 2,901^2 + 2,184^2} = \underline{21,299 \text{ m}}$$

$$t_{SD} = \arctan \frac{y_D - y_S}{x_D - x_S} = \frac{2,901}{20,988} = \underline{8,743 \text{ gon}}$$

$$v_{SD} = \operatorname{arccot} \frac{z_D - z_S}{\sqrt{(x_D - x_S)^2 + (y_D - y_S)^2}} = \frac{2,184}{\sqrt{20,988^2 + 2,901^2}} = \underline{93,462 \text{ gon}}$$

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-beispiel03>

**Beispiel 4:** Mit den Messwerten aus Beispiel 1 soll die Ebenengleichung einer Ebene durch A, B und C aufgestellt und der Neigungswinkel dieser Ebene sowie der Richtungswinkel der Falllinie berechnet werden.

**Lösung:** Mit den Formeln aus Tabelle 2 ( $\mathcal{E}$  durch  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ )

$$\vec{n} = (\vec{v}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A) = \begin{pmatrix} 9,595 \\ 6,854 \\ -0,738 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10,464 \\ 10,380 \\ -0,180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1068 \\ 0,0515 \\ 27,875 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \vec{v}_A = 3108,55$$

lautet die Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix} 2,1068 \\ 0,0515 \\ 27,875 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 3108,55$$

**Probe:** Man setzt die Punkte B und C in die Ebenengleichung ein und überprüft damit, dass B und C in der Ebene liegen:

$$\begin{pmatrix} 2,1068 \\ 0,0515 \\ 27,875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 126,522 \\ 106,854 \\ 101,758 \end{pmatrix} = 3108,55 \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 2,1068 \\ 0,0515 \\ 27,875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 127,391 \\ 110,380 \\ 101,686 \end{pmatrix} = 3108,55 \checkmark$$

Der Neigungswinkel der Ebene beträgt

$$\arccos \left( \frac{n_z}{|\vec{n}|} \right) = \arccos \left( \frac{27,875}{\sqrt{2,1068^2 + 0,0515^2 + 27,875^2}} \right) = \underline{4,804 \text{ gon}}$$

Der Richtungswinkel der Falllinie beträgt

$$\arctan \left( \frac{n_y}{n_x} \right) = \arctan \left( \frac{0,0515}{2,1068} \right) = \underline{1,55 \text{ gon}}$$

(Aus  $n_y \approx 0$  erkennt man, dass der Normalenvektor  $\vec{n}$  fast vollständig in der  $xz$ -Ebene liegt, weshalb es plausibel ist, dass die Falllinie etwa in Nord-Süd-Richtung verläuft, nach Norden abfallend.)

<http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-beispiel04>

**Beispiel 5:** Mit den Messwerten aus Beispiel 1 sollen die Koordinaten des Punktes P berechnet werden, der in der Ebene ABC liegt.

**Lösung:** Man benötigt hier den Schnittpunkt der Geraden SP mit der Ebene aus Beispiel 4. Ein Punkt auf der Geraden SP hat nach den Formeln aus Abschnitt 1.2 die Darstellung

$$\begin{aligned}x &= x_S + s \cdot \cos t_{SP} \cdot \sin v_{SP} \\y &= y_S + s \cdot \sin t_{SP} \cdot \sin v_{SP} \\z &= z_S + s \cdot \cos v_{SP}\end{aligned}$$

und kann als

$$\vec{v} = \vec{v}_S + s \cdot \begin{pmatrix} \cos t_{SP} \cdot \sin v_{SP} \\ \sin t_{SP} \cdot \sin v_{SP} \\ \cos v_{SP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100,000 \\ 100,000 \\ 100,00 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0,77255 \\ 0,62634 \\ 0,10427 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.  $s$  erhält die Rolle des Geradenparameters und der Vektor dahinter ist der Geradenvektor  $\vec{g}$ . Man überzeugt sich leicht, dass hier automatisch  $|\vec{g}| = 1$  gilt. Mit der Formel aus Tabelle 2

$$\vec{v}_P = \vec{v}_S + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{v}_S}{\vec{n} \cdot \vec{g}} \cdot \vec{g}$$

und  $\vec{n} \cdot \vec{r}_S = 3003,33$ ;  $\vec{n} \cdot \vec{g} = 4,56634$  erhält man

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} 100,000 \\ 100,000 \\ 100,00 \end{pmatrix} + \frac{3108,55 - 3003,33}{4,56634} \cdot \begin{pmatrix} 0,77255 \\ 0,62634 \\ 0,10427 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117,801 \\ 114,432 \\ 102,402 \end{pmatrix}$$

**Probe:** Man setzt P in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix} 2,1068 \\ 0,0515 \\ 27,875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 117,801 \\ 14,432 \\ 2,402 \end{pmatrix} = 3108,53 \checkmark$$

## 2.2 ANWENDUNG: KUGEL DURCH VIER PUNKTE

Eine Grundaufgabe nicht nur der Geodäsie ist es, eine Kugel durch vier gegebene Punkte  $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$  auf der Kugeloberfläche zu konstruieren, d.h. den Mittelpunkt M und den Radius  $r$  zu bestimmen. Dabei schließen wir aus, dass A,B,C,D alle in derselben Ebene liegen. Deshalb dürfen auch keine drei

Punkte auf einer Geraden liegen. Es gibt eine Vielzahl von Berechnungsmöglichkeiten, von denen wir die folgende skizzieren:

### Berechnung:

1. Man berechnet die Mittelpunkte P,Q,R der Strecken AB,BC,CD aus Koordinatenmitteln:

$$\vec{v}_P = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B), \quad \vec{v}_Q = \frac{1}{2}(\vec{v}_B + \vec{v}_C), \quad \vec{v}_R = \frac{1}{2}(\vec{v}_C + \vec{v}_D)$$

2. Man berechnet eine Ebene  $\mathcal{E}_P$  durch P, auf  $\vec{g}_{AB}$  senkrecht steht. Mit den Formeln aus Tabelle 2 ( $\mathcal{E}$  durch  $\mathcal{P}$  und  $\perp \mathcal{G}$ ) erhält man

$$\vec{n}_P = \vec{g}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A, \quad d_P = \vec{n}_P \cdot \vec{v}_P$$

$\mathcal{E}_P$  enthält alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, also auch M. Man berechnet genauso eine Ebene  $\mathcal{E}_Q$  durch Q, auf  $\vec{g}_{BC}$  senkrecht steht, und eine Ebene  $\mathcal{E}_R$  durch R, auf  $\vec{g}_{CD}$  senkrecht steht. Auch diese beiden Ebenen enthalten M.

3. Schließlich muss man nur noch die Ebenen  $\mathcal{E}_P, \mathcal{E}_Q, \mathcal{E}_R$  schneiden. Wenn die oben genannten Sonderfälle ausgeschlossen wurden, gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt. Da der Kugelmittelpunkt M in allen drei Ebenen liegt, kann dieser Schnittpunkt nur M sein. Praktisch berechnet man M
  - a. entweder mit den Formeln aus Tabelle 2, z.B. zuerst  $\mathcal{G} = \text{Schnitt}(\mathcal{E}_P, \mathcal{E}_Q)$  und dann  $M = \text{Schnitt}(\mathcal{G}, \mathcal{E}_R)$ ,
  - b. oder als Lösung des linearen Systems der drei Ebenengleichungen.
4. Man berechnet aus Koordinaten die Abstände MA,MB,MC und MD. **Probe:** Diese vier Abstände müssen gleich sein und ergeben den gesuchten Radius  $r$ .

**Aufgabe 2:** In einem kugelförmigen Kuppelgewölbe wurden von Tachymeterstandpunkt S aus vier Punkte A,B,C,D gemessen:

Zielpunkt	Hz-Richtung [gon]	Zenitwinkel [gon]	Schrägstrecke [m]
A	0,00	77,30	17,11
B	175,89	95,92	16,10
C	240,00	71,34	23,06
D	311,82	93,35	14,02

Der höchste Punkt Z auf der Kugeloberfläche soll abgesteckt werden. Berechnen Sie hierfür die polaren Absteckwerte (Hz-Richtung, Zenitwinkel, Schrägstrecke) von S aus.

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-aufgabe02>

## 3 RÄUMLICHE GEODÄTISCHE SCHNITTE

### 3.1 KUGELSCHNITT (TRISPHÄRATION)

Gegeben sind 3 bekannte Festpunkte A,B,C mit Koordinaten  $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ , zu denen von einem unbekanntem Neupunkt N drei Schrägstrecken  $s_{NA}, s_{NB}, s_{NC}$  gemessen sind. Gesucht ist der Neupunkt N mit Koordinaten  $x_N, y_N, z_N$ . Diese Aufgabe läuft geometrisch auf den Schnitt dreier Kugeln hinaus, genannt Trisphäration. Der Neupunkt N liegt auf Kugeln

- um Punkt A mit dem Radius  $s_{NA}$ ,
- um Punkt B mit dem Radius  $s_{NB}$  und
- um Punkt C mit dem Radius  $s_{NC}$ .

Die Trisphäration ist verwandt mit dem Bogenschnitt in der Ebene (↗Manuskript „Ebene geodätische Berechnungen“), bei der zwei Kreisbögen zu schneiden sind. (Unrichtig sprach man früher deshalb manchmal vom „Räumlichen Bogenschnitt“.)

Diese Aufgabe stellt sich bei Anwendungen der Navigation, bei denen Strecken gemessen werden. Bei satellitengeodätischen Anwendungen stellt sich eine zumindest ähnliche Aufgabe, wobei hier anstatt Strecken sogenannte Pseudostrecken gemessen werden.

Zwei Kugeln schneiden sich nicht oder in einem Kreis, als Sonderfall in einem Punkt. Die dritte Kugel schneidet diesen Kreis nicht oder in zwei Punkten, im Sonderfall besteht Eindeutigkeit. Im Regelfall ist die Lösung also zweideutig, der Sonderfall sollte vermieden werden. Wenn keine Lösung erhalten wird, sind die Messwerte  $s_{NA}, s_{NB}, s_{NC}$  und die Koordinaten von A,B,C nicht kompatibel. Es liegt damit dieselbe Situation vor, wie beim Bogenschnitt in der Ebene.

#### **Berechnung:**

1. Zunächst setzen wir die Messwerte in Beziehung zu den unbekanntem Neupunktkoordinaten  $x_N, y_N, z_N$ :

$$s_{NA}^2 = (x_A - x_N)^2 + (y_A - y_N)^2 + (z_A - z_N)^2$$

$$s_{NB}^2 = (x_B - x_N)^2 + (y_B - y_N)^2 + (z_B - z_N)^2$$

$$s_{NC}^2 = (x_C - x_N)^2 + (y_C - y_N)^2 + (z_C - z_N)^2$$

2. Wir haben drei nichtlineare Gleichungen mit drei Unbekannten, die wie folgt gelöst werden können: Die Klammern werden aufgelöst und neu zusammengefasst:

$$2(x_A x_N + y_A y_N + z_A z_N) = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 + x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - s_{NA}^2$$

$$2(x_B x_N + y_B y_N + z_B z_N) = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 + x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - s_{NB}^2$$

$$2(x_C x_N + y_C y_N + z_C z_N) = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - s_{NC}^2$$

3. Nun führen wir folgende neue Bezeichnungen ein:

$$a := x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - s_{NA}^2, \quad b := x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - s_{NB}^2, \quad c := x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - s_{NC}^2$$

$$\tau := x_N^2 + y_N^2 + z_N^2$$

Während  $a, b, c$  berechnet werden können, ist  $\tau$  noch unbekannt. Nun definieren wir noch folgende Matrix:

$$A := 2 \begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist regulär, solange die Punkte A,B,C und der Koordinatenursprung nicht in einer Ebene liegen. Das sollte durch die Wahl des Koordinatenursprungs sichergestellt sein, so dass  $A$  invertiert werden kann.

4. Wenn wir  $\tau$  vorübergehend als bekannt ansehen, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem. In Matrixschreibweise lautet dieses

$$A \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \tau \\ b + \tau \\ c + \tau \end{pmatrix}$$

und die Lösung lautet:

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a + \tau \\ b + \tau \\ c + \tau \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \tau \cdot A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Noch können wir die Lösung nicht ausrechnen, weil  $\tau$  in Wahrheit ja unbekannt ist. Alles andere ist jedoch bekannt und berechenbar.

5. Mit den einzuführenden Abkürzungen für die berechenbaren Vektoren

$$\vec{v}_0 := A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{g} := A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass N ein Punkt auf einer Geraden mit der Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \vec{v}_0 + \tau \cdot \vec{g}$$



und dem Geradenparameter  $\tau$  ist. Dabei muss

$$\tau = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 = |\vec{v}_0 + \tau \cdot \vec{g}|^2$$

erfüllt werden. Das Resultat ist eine quadratische Gleichung für  $\tau$ , die gelöst werden kann:

$$|\vec{v}_0|^2 + (2 \cdot \vec{v}_0 \cdot \vec{g} - 1)\tau + |\vec{g}|^2 \tau^2 = 0$$
$$\tau = -\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{g} - 1/2}{|\vec{g}|^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{g} - 1/2}{|\vec{g}|^2}\right)^2 - \frac{|\vec{v}_0|^2}{|\vec{g}|^2}}$$

Dabei können je nach Vorzeichen des Ausdrucks unter der Wurzel entstehen:

- Keine Lösung: Die drei Kugeln schneiden sich nicht in einem Punkt. Es muss ein grober Fehler vorliegen.
- Eine Lösung: Im Grenzfall berühren sich Schnittkreis und Kugel nur. Diese Situation ist wie beim Bogenschnitt zu vermeiden.
- Zwei Lösungen: Die drei Kugeln schneiden sich in zwei Punkten. Dies sollte praktisch der Normalfall sein. Die richtige Lösung muss anhand von Zusatzinformationen ausgewählt werden.

**Probe:** Man berechnet die Messwerte aus endgültigen Koordinaten und vergleicht mit den gegebenen Werten.

**Beispiel 6:** Gegeben sind die Koordinaten X,Y,Z der Festpunkte A,B,C und die Messwerte (Schrägstrecken s zum Neupunkt N)

Punkt	X [m]	Y [m]	Z [m]	s [m]
A	1610,63	1711,65	54,67	390,379
B	1402,91	2306,97	72,22	420,445
C	807,36	1705,89	48,43	508,322

Berechnen Sie den Neupunkt N.

**Lösung:** Die Hilfsgrößen haben folgende Werte in den entsprechenden Einheiten:

$$a = 1610,63^2 + 1711,65^2 + 54,67^2 - 390,379^2 = 5374468$$

$$b = 1402,91^2 + 2306,97^2 + 72,22^2 - 420,445^2 = 7118709$$

$$c = 807,36^2 + 1705,89^2 + 48,43^2 - 508,322^2 = 3305845$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,000962487 & -0,000869616 & 0,000210293 \\ 0,00080834 & -0,002840984 & 0,003324053 \\ -0,044518138 & 0,114567396 & -0,110267413 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -322,4905181 \\ -4890,933192 \\ 211783,6595 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0,000303164 \\ 0,001291409 \\ -0,040218154 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{g} - 1/2}{|\vec{g}|^2} = -5264420, \quad \frac{|\vec{v}_0|^2}{|\vec{g}|^2} = 2,77141 \cdot 10^{13}$$

$$\tau_1 = 5264870, \quad \tau_2 = 5263969$$

Somit erhalten wir zwei Lösungen, die richtige muss mittels Zusatzinformation ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} x_{N1} \\ y_{N1} \\ z_{N1} \end{pmatrix} = \vec{v}_0 + \tau_1 \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 1273,63 \\ 1908,17 \\ 40,30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{N2} \\ y_{N2} \\ z_{N2} \end{pmatrix} = \vec{v}_0 + \tau_2 \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 1273,36 \\ 1907,01 \\ 76,54 \end{pmatrix}$$

**Probe:** Die Schrägstrecken werden aus endgültigen Koordinaten zurückgerechnet.

$$\sqrt{(1610,63 - 1273,63)^2 + (1711,65 - 1908,17)^2 + (54,67 - 40,30)^2} = 390,38 \checkmark$$

$$\sqrt{(1402,91 - 1273,63)^2 + (2306,97 - 1908,17)^2 + (72,22 - 40,30)^2} = 420,44 \checkmark$$

$$\sqrt{(807,36 - 1273,63)^2 + (1705,89 - 1908,17)^2 + (48,43 - 40,30)^2} = 508,32 \checkmark$$

$$\sqrt{(1610,63 - 1273,36)^2 + (1711,65 - 1907,01)^2 + (54,67 - 76,54)^2} = 390,38 \checkmark$$

$$\sqrt{(1402,91 - 1273,36)^2 + (2306,97 - 1907,01)^2 + (72,22 - 76,54)^2} = 420,44 \checkmark$$

$$\sqrt{(807,36 - 1273,36)^2 + (1705,89 - 1907,01)^2 + (48,43 - 76,54)^2} = 508,32 \checkmark$$

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie das vorige Beispiel mit den Koordinaten und Strecken

Punkt	X [m]	Y [m]	Z [m]	s [m]
A	514,24	921,15	279,19	842,912
B	306,59	173,34	196,87	572,090
C	619,37	299,97	812,50	157,088

## 4 RÄUMLICHE TRANSFORMATIONEN

Häufig stellt sich die Aufgabe, die geometrischen Beziehungen zwischen zwei räumlichen Referenzsystemen herzustellen, die über ein Transformationsmodell beschrieben und mittels Transformationsparametern numerisch realisiert werden. Dazu können **identische Punkte** vorliegen sein, bei denen in beiden Systemen Koordinaten gegeben sind. Außerdem können bei gegebenen Transformationsparametern **Neupunkte** zu transformieren sein. Dazu erweitern wir die aus dem Manuskript „Ebene Geodätische Berechnungen“ bekannten ebenen Transformationen um eine Raumdimension. (Wiederholen Sie diese Abschnitte, falls nötig.) Außerdem verwenden wir konsequent die Matrix-Vektor-Schreibweise:  $\vec{v}$  bezeichnet einen dreidimensionalen Ortsvektor im Startsystem und  $\vec{V}$  den entsprechenden Ortsvektor im Zielsystem.

### 4.1 ELEMENTARE TRANSFORMATIONSSCHRITTE

Wir betrachten folgende elementare Transformationsschritte

- **Translation** (Verschiebung):  $\vec{V} = \vec{t} + \vec{v}$  mit dem Translationsvektor  $\vec{t}$ . Transformationsparameter sind die drei Komponenten von  $\vec{t}$ .
- eine **Skalierung** (Maßstabsänderung):  $\vec{V} = m \cdot \vec{v}$  mit dem Maßstabsfaktor  $m$  als Transformationsparameter
- drei **Skalierungen**, unterschiedlich in jeder Raumrichtung:  $\vec{V} = M \cdot \vec{v}$  mit der diagonalen Skalierungsmatrix  $M$ . Transformationsparameter sind die drei Diagonalelemente von  $M$ , die jeweils Maßstabsfaktoren ihrer entsprechenden Raumrichtung sind.
- **Rotation** (Drehung):  $\vec{V} = R \cdot \vec{v}$  mit der Rotations- oder Drehmatrix  $R$ . Transformationsparameter werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.
- **Transvektion** (Scherung):  $\vec{V} = S \cdot \vec{v}$  mit der Transvektions- oder Schermatrix  $S$ . Transformationsparameter werden im Abschnitt 4.4 vorgestellt.
- **Reflexion** (Spiegelung), um vom Links- ins Rechtssystem oder umgekehrt zu transformieren. Diese wird durch eine Spiegelungsmatrix folgendermaßen vermittelt:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

Die Spiegelung erfolgt hier an der XY-Ebene. Für die XZ- oder YZ-Ebene als Spiegelungsebene würde das Minus vor eine andere Eins verschoben werden.

Komplexere Transformationen bestehen einfach aus einer Abfolge mehrerer elementarer Transformationsschritte. Häufig ist wie bei ebenen Transformationen die

Reihenfolge zu beachten: Ein Vertauschen der Schritte kann zu einem anderen Transformationsmodell führen, oder zum selben Transformationsmodell, das aber möglicherweise durch zahlenmäßig andere Parameter numerisch realisiert wird.

## 4.2 RÄUMLICHE ROTATIONEN

Wir betrachten die Rotation im Raum um eine schräg im Raum liegende Achse durch den Koordinatenursprung  $(0,0,0)$ . Rechnerisch wird ein solcher Transformationsschritt durch eine **Rotationsmatrix**  $R$  wie folgt realisiert:

$$\vec{V} = R \cdot \vec{v}$$

Rotationsmatrizen haben folgende Eigenschaften:

1. Es gilt  $R^T R = I$  (Einheitsmatrix), d.h. die Transponierte von  $R$  ist gleichzeitig die Inverse von  $R$ . Sie ist ebenso eine Rotationsmatrix und beschreibt die Rückwärtsrotation  $R^T \cdot \vec{V} = \vec{v}$ .
2. Es gilt  $\det(R)=1$ . (Daraus und aus  $R^T R = I$  kann man folgern, dass  $R$  die Eigenwerte 1,1,1 hat, worauf wir in diesem Text aber nicht näher eingehen.)

Rotationsmatrizen sind normalerweise vollbesetzte Matrizen. In der Ebene genügt **eine einzige** Zahl, um diese vollständige zu beschreiben, nämlich der Drehwinkel  $\varepsilon$ :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Im Raum reichen **drei** Zahlen prinzipiell aus, möglicherweise sind vier Zahlen aber eleganter. Es gibt mehrere Möglichkeiten, solche Parameter zu wählen. Die häufigste Möglichkeit ist die Zerlegung der Rotation um eine schräge Achse in drei aufeinanderfolgende **Rotationen um Koordinatenachsen**.

Eine Rotation um die X-Achse mit dem Drehwinkel  $\varepsilon_1$  wird durch die Rotationsmatrix

$$R_1(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_1) & -\sin(\varepsilon_1) \\ 0 & \sin(\varepsilon_1) & \cos(\varepsilon_1) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Eine Rotation um die Y-Achse mit dem Drehwinkel  $\varepsilon_2$  wird durch die Rotationsmatrix

$$R_2(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_2) & 0 & \sin(\varepsilon_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varepsilon_2) & 0 & \cos(\varepsilon_2) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Eine Rotation um die Z-Achse mit dem Drehwinkel  $\varepsilon_3$  wird durch die Rotationsmatrix

$$R_3(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_3) & -\sin(\varepsilon_3) & 0 \\ \sin(\varepsilon_3) & \cos(\varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese Matrizen sind im Kern ebene Rotationsmatrizen mit jeweils einer zusätzlichen Zeile und Spalte, die dafür sorgt, dass die Koordinate der Achse, um die gedreht wird, jeweils fest bleibt.

Die Winkel  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  nennt man die **Eulerschen Winkel**. Wenn man die Reihenfolge der Rotationen um Koordinatenachsen  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  wählt, gelangt man zu folgender Zerlegung der ursprünglichen Rotation:

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = R_3(\varepsilon_3) \cdot R_2(\varepsilon_2) \cdot R_1(\varepsilon_1)$$



*Bei der zweiten und dritten Rotation wird jeweils nicht um die ursprüngliche Achse des Startsystems gedreht, sondern um die Achse des bereits ein- oder zweimal gedrehten Zwischensystems.*

**Aufgabe 4:** Beweisen Sie, dass die Matrizen  $R_1, R_2, R_3$  sowie deren Produkt Rotationsmatrizen sind. (Hinweis: Sie benötigen bekannte Rechengesetze aus der Matrixalgebra.)

Wenn man die Matrixmultiplikation durchführt, gelangt man zu folgender Gestalt von  $R$ :

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 & \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 - \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_3 & \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_3 + \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \cos\varepsilon_3 \\ \cos\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 & \sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 + \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_3 & \cos\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2 \sin\varepsilon_3 - \sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_3 \\ -\sin\varepsilon_2 & \sin\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 & \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5:** Beweisen Sie mit dieser Darstellung, dass  $R(\varepsilon_1, 0, 0) = R_1(\varepsilon_1)$  usw. gilt.

Die zugehörige **Rückwärtsrotation** wird einfach mit  $R^T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  erhalten.



*Die zugehörige Rückwärtsrotation wird im Allgemeinen **nicht** mit  $R(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3)$  erhalten. Außer den Vorzeichen der Winkel müsste auch die Reihenfolge der Achsen umgekehrt werden.*

Alternativ kann die Rotation auch direkt ohne Zerlegung über die **schräge Achse**, genannt **Euler-Achse**  $\vec{e}$ , und den zugehörigen Drehwinkel  $\varepsilon$  beschrieben werden.  $\vec{e}$  ist der entlang dieser Achse zeigende Einheitsvektor ( $|\vec{e}|=1$ ) mit den Komponenten  $e_x, e_y, e_z$ . Die Rotationsmatrix hat mit diesen Parametern folgende Gestalt:

$$R(e_x, e_y, e_z, \varepsilon) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varepsilon + e_x^2(1 - \cos\varepsilon) & e_x e_y(1 - \cos\varepsilon) - e_z \sin\varepsilon & e_x e_z(1 - \cos\varepsilon) + e_y \sin\varepsilon \\ e_x e_y(1 - \cos\varepsilon) + e_z \sin\varepsilon & \cos\varepsilon + e_y^2 \cdot (1 - \cos\varepsilon) & e_y e_z(1 - \cos\varepsilon) - e_x \sin\varepsilon \\ e_x e_z(1 - \cos\varepsilon) - e_y \sin\varepsilon & e_y e_z(1 - \cos\varepsilon) + e_x \sin\varepsilon & \cos\varepsilon + e_z^2(1 - \cos\varepsilon) \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6:** Beweisen Sie mit dieser Darstellung, dass  $R(1,0,0, \varepsilon_1) = R_1(\varepsilon_1)$  usw. gilt.

Offenbar haben wir nun **vier** Rotationsparameter  $e_x, e_y, e_z, \varepsilon$ . Diese sind allerdings durch die Einheitsvektor-Bedingung verknüpft:

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$$

Formal könnte man darüber einen Parameter aus den Transformationsgleichungen eliminieren, was allerdings nicht ratsam ist. Bei der Bestimmung der Transformationsparameter aus identischen Punkten arbeitet man lieber mit der Einheitsvektor-Bedingung als zusätzlicher **Bedingungsgleichung**.

Alle Drehwinkel  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon$  sind in den hier angegebenen Formeln bei Linkssystemen positiv gegen den Uhrzeigersinn und bei Rechtssystemen positiv im Uhrzeigersinn definiert. Der Blick ist hierfür entgegen der jeweiligen Rotationsachse gerichtet.

Die zugehörige **Rückwärtsrotation** wird einfach mit

$$R^T(e_x, e_y, e_z, \varepsilon) = R(e_x, e_y, e_z, -\varepsilon) = R(-e_x, -e_y, -e_z, \varepsilon)$$

erhalten. Die Bestimmung von Euler-Achse und Drehwinkel  $\vec{e}, \varepsilon$  ist nicht eindeutig, weil offenbar mit  $-\vec{e}, -\varepsilon$  dieselbe Rotation beschrieben wird, wie mit  $\vec{e}, \varepsilon$ .

**Aufgabe 7:** Beweisen Sie diese Aussagen.

Bei der Bestimmung der Transformationsparameter aus identischen Punkten kann es sowohl bei der Verwendung von Euler-Winkeln  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , als auch von Euler-Achse und Drehwinkel  $\vec{e}, \varepsilon$  zu **Singularitätsproblemen** kommen.

**Beispiel 7:** Der Drehwinkel  $\varepsilon$  ist nahezu Null. Dann ist die Euler-Achse sehr schlecht definiert. Das wirkt sich numerisch so aus, dass sich Rundungsfehler sehr verstärken. (Für  $\varepsilon = 0$  findet sogar überhaupt keine Rotation statt, also ist die Achse völlig undefiniert. Das entsprechende Gleichungssystem zur der Bestimmung der Transformationsparameter hat keine eindeutige Lösung.)

Um solche und weitere Probleme zu vermeiden, empfehlen wir einen dritten Ansatz über sogenannte **Quaternionen**  $q_0, q_1, q_2, q_3$ . Die Rotationsmatrix hat mit diesen Parametern folgende Gestalt:

$$R(q_0, q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

Auch hier haben wir **vier** Transformationsparameter, so dass eine zusätzliche Bedingungsgleichung zu stellen ist. Diese lautet meist

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Man spricht auch von einer Einheitsquaternion.

Die zugehörige Rückwärtsrotation wird einfach mit  $R(-q_0, q_1, q_2, q_3)$  oder mit  $R(q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$  erhalten. Wiederum ist die Bestimmung der Parameter nicht eindeutig, weil offenbar mit  $-q_0, -q_1, -q_2, -q_3$  dieselbe Rotation beschrieben wird, wie mit  $q_0, q_1, q_2, q_3$ .

**Aufgabe 8:** Beweisen Sie diese Aussagen.

Beschreibung	Parameter	Vorteile
Euler-Winkel	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	keine zusätzliche Bedingungsgleichung, in der Regel Eindeutigkeit der Parameter
Euler-Achse und Drehwinkel	$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}, \varepsilon$	geometrisch anschaulich, Rückwärtsrotation einfach ableitbar
Quaternionen	$q_0, q_1, q_2, q_3$	einfachste Darstellung von $R$ , keine Winkelfunktionen, keine Singularitätsprobleme, Rückwärtsrotation einfach ableitbar

Die Parametersätze können ineinander umgerechnet werden, wofür es spezielle Formelapparate gibt.

### 4.3 INFINITESIMALE RÄUMLICHE ROTATIONEN

Eine infinitesimale Rotation liegt vor, wenn  $R \approx I$  gilt, sich also geometrisch nahezu nichts ändert. In Parametern ausgedrückt lautet das:

$$\varepsilon_1 \approx 0, \varepsilon_2 \approx 0, \varepsilon_3 \approx 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon \approx 0 \quad \text{oder} \quad q_1 \approx 0, q_2 \approx 0, q_3 \approx 0$$

Für Euler-Winkel erhält man mit den Näherungen  $\cos \varepsilon_i \approx 1$ ,  $\sin \varepsilon_i \approx \varepsilon_i$  sowie  $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \approx 0$  folgende Darstellungen:

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix nennen wir die **infinitesimale Rotationsmatrix**. Anders als die gewöhnliche Rotationsmatrix ist ihre Gestalt nicht von der Reihenfolge der Achsen abhängig, um die nacheinander rotiert wird.

 Die Euler-Winkel sind hier im **Bogenmaß** einzusetzen.


Die Rückwärtsrotation lautet diesmal einfach  $R(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3)$ .

**Aufgabe 9:** Beweisen Sie diese Aussagen.

Andere Darstellungen der infinitesimalen Rotationsmatrix sind

$$R(e_x, e_y, e_z, \varepsilon) \approx \begin{pmatrix} 1 & -e_z\varepsilon & e_y\varepsilon \\ e_z\varepsilon & 1 & -e_x\varepsilon \\ -e_y\varepsilon & e_x\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(q_0, q_1, q_2, q_3) \approx \begin{pmatrix} 1 & -2q_0q_3 & 2q_0q_2 \\ 2q_0q_3 & 1 & -2q_0q_1 \\ -2q_0q_2 & 2q_0q_1 & 1 \end{pmatrix}$$

 Die infinitesimale Rotationsmatrix ist streng genommen keine Rotationsmatrix, weil die genannten Eigenschaften einer solchen Matrix nur näherungsweise erfüllt sind:  $R^T R \approx I$  und  $\det(R) \approx 1$ .

Daraus liest man folgende Identitäten ab:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = 2q_0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \varepsilon^2$$

Die Bestimmung der Transformationsparameter aus identischen Punkten ist für infinitesimale Rotationen besonders leicht, weil sie auf ein lineares Gleichungssystem führt. Deshalb ist diese Näherung sehr beliebt, wenn sie ausreichend genaue Ergebnisse liefert.

## 4.4 RÄUMLICHE TRANSVEKTIONEN

Die Transvektion (Scherung) bewirkt, dass sich Winkel ändern. Inhalte von Flächen und Volumina von Körpern bleiben aber gleich. Geraden bleiben Geraden und parallele Geraden bleiben parallel.

Rechnerisch wird ein solcher Transformationsschritt durch eine **Transvektionsmatrix**  $S$  wie folgt realisiert:

$$\vec{V} = S \cdot \vec{v}$$

Die Transvektionsmatrix  $S$  ist eine **normierte Dreiecksmatrix**, das ist eine Matrix mit ausschließlich Einsen auf und Nullen unter der Hauptdiagonale:



$$S(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & f_2 \\ 0 & 1 & f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die drei Parameter der Transvektion sind  $f_1, f_2, f_3$ . Im einfachsten Fall erfolgt nur eine Transvektion in **einer** Koordinatenebene, z.B. der  $XY$ -Ebene. Die entsprechende Transvektionsmatrix hat dann folgende Gestalt:

$$S_1(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die  $z$ -Koordinate wird nicht geändert und hat auch keinen Einfluss auf die beiden anderen Koordinaten. Der rechte Winkel zwischen  $x$ - und  $y$ -Achse wird um den Transvektionswinkel (Scherwinkel)  $\tau_1 = \arctan(f_1)$  vergrößert (bzw. um  $-\tau_1$  verkleinert, wenn  $\tau_1 < 0$  ist). Entsprechende Transvektionsmatrizen in den anderen beiden Koordinatenebenen sind

$$S_2(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Transvektionswinkeln  $\tau_2 = \arctan(f_2)$  und  $\tau_3 = \arctan(f_3)$ . Statt  $f_1, f_2, f_3$  können auch  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  als Parameter der Transvektion angesehen werden.

Die Nacheinanderausführung von drei ebenen Transvektionen ergibt die räumliche Transvektion

$$S_1(f_1) \cdot S_2(f_2) \cdot S_3(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & f_2 + f_1 \cdot f_3 \\ 0 & 1 & f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bei Angabe des Parameters  $f_2$  muss also mitgeteilt werden, ob sich dieser auf  $S(f_1, f_2, f_3)$  oder auf  $S_2(f_2)$  bezieht. Bei Änderung der Reihenfolge der elementaren Transformationsschritte ändert sich auch das Ergebnis auf ähnliche Weise, wie bei der Rotation.

**Aufgabe 10:** Berechnen Sie  $S_3(f_3) \cdot S_2(f_2) \cdot S_1(f_1)$  und vergleichen Sie erneut mit  $S(f_1, f_2, f_3)$ . Spalten Sie die räumliche Transvektion mit  $S(0,16; 0,10; -0,63)$  in drei aufeinanderfolgende ebene Transvektionen in den Reihenfolgen 1-2-3 sowie 3-2-1 auf und geben Sie deren Parameter an.

Die **Rückwärtstransvektion**

$$\vec{v} = S^{-1} \cdot \vec{V}$$

wird mit der Transvektionsmatrix

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -f_1 & f_1 \cdot f_3 - f_2 \\ 0 & 1 & -f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S(-f_1, f_1 \cdot f_3 - f_2, -f_3)$$

erhalten. Zwei Parameter ändern dabei ihr Vorzeichen, einer aber nicht.

**Aufgabe 10** (Fortsetzung): Berechnen Sie zu  $S(0,16; 0,10; -0,63)$  die Rückwärtstransvektionsmatrix. Demonstrieren Sie, dass man diese aus drei aufeinanderfolgenden ebenen Transvektionen durch Umkehrung der Reihenfolge und aller Vorzeichen der Parameter gewinnen kann.

## 4.5 INFINITESIMALE RÄUMLICHE TRANSVEKTIONEN

Häufig, z.B. bei der Entzerrung historischer Karten, sind die Transvektionswinkel klein und somit  $f_1 \approx 0, f_2 \approx 0, f_3 \approx 0$ . Dann kann man näherungsweise setzen

$$S_1(f_1) \cdot S_2(f_2) \cdot S_3(f_3) \approx \begin{pmatrix} 1 & f_1 & f_2 \\ 0 & 1 & f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S(f_1, f_2, f_3)$$

Die Parameter der räumlichen Transvektion sind näherungsweise gleich den Parameter der drei ebenen Transvektionen, und deren Reihenfolge ist beliebig.

Die infinitesimale **Rückwärtstransvektion**

$$\vec{v} = S^{-1} \cdot \vec{V}$$

wird mit der Transvektionsmatrix

$$S^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1 & -f_1 & -f_2 \\ 0 & 1 & -f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S(-f_1, -f_2, -f_3)$$

erhalten. Alle Parameter ändern dabei nur ihr Vorzeichen.

Die Bestimmung der Transformationsparameter aus identischen Punkten ist für infinitesimale Transvektionen besonders leicht, weil sie auf ein lineares Gleichungssystem führt. Deshalb ist diese Näherung sehr beliebt, wenn sie ausreichend genaue Ergebnisse liefert.

## 4.6 DIE RÄUMLICHE HELMERT-TRANSFORMATION

Komplexere Transformationsmodelle werden durch Nacheinanderausführung mehrerer elementarer Transformationsschritte erhalten. Das in der Geodäsie am häufigsten angewendete räumliche Transformationsmodell ist das Modell der

räumlichen Helmert-Transformation. Wie bei der ebenen Helmert-Transformation besteht es aus einer Rotation, einer Skalierung und einer Translation:

$$\vec{V} = \vec{t} + m \cdot R \cdot \vec{v}$$

Rotation und Skalierung sind in diesem Fall vertauschbar ( $m \cdot R = R \cdot m$ ). Die Translation ist üblicherweise der letzte Schritt.

Die Parameter der räumlichen Helmert-Transformation werden meist mit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, m, t_1, t_2, t_3$$

angegeben, so dass sich auch die Bezeichnung „7-Parameter-Transformation“ eingebürgert hat. Eine andere Bezeichnung ist „räumliche Ähnlichkeitstransformation“, weil die Winkel nicht geändert werden, so dass zwischen beiden Systemen geometrische Ähnlichkeit besteht.

Statt der Eulerschen Winkel  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  können auch anderen Parameter der räumlichen Rotation verwendet werden, z.B. Quaternionen.

Die zugehörige **Rückwärtstransformation** ist ebenso eine räumliche Helmert-Transformation:

$$\vec{v} = \vec{t}' + m' \cdot R' \cdot \vec{V}$$

Sie wird mit folgenden Beziehungen erhalten:

$$\vec{t}' = -\frac{1}{m} \cdot R^{-1} \cdot \vec{t}, \quad m' = \frac{1}{m}, \quad R' = R^{-1}$$

Besonders einfach gestaltet sich die Rückwärtstransformation bei infinitesimaler Helmert-Transformation, die unter den Voraussetzungen

$$\varepsilon_1 \approx 0, \varepsilon_2 \approx 0, \varepsilon_3 \approx 0, m \approx 1, t_1 \approx 0, t_2 \approx 0, t_3 \approx 0$$

näherungsweise gültig ist. Dabei wird erhalten:

$$\varepsilon'_1 \approx -\varepsilon_1, \quad \varepsilon'_2 \approx -\varepsilon_2, \quad \varepsilon'_3 \approx -\varepsilon_3, \quad m' \approx 2 - m, \quad t'_1 \approx -t_1, \quad t'_2 \approx -t_2, \quad t'_3 \approx -t_3$$

Eine wichtige Aufgabe ist die Berechnung der Transformationsparameter aus den Koordinaten identischer Punkte. Mindestens drei Punkte sind hierfür erforderlich, und diese dürfen nicht auf einer Geraden liegen. In Normalfall ist das Problem **überbestimmt**, d.h. es gibt mehr Koordinaten (mindestens  $3 \cdot 3 = 9$ ) als Parameter (genau 7). Damit ergibt sich die Möglichkeit einer **Ausgleichung** von Abweichungen in den Koordinaten identischer Punkte. Je mehr identische Punkte vorliegen, desto zuverlässigere Ergebnisse liefert diese Ausgleichung.

Ähnlich wie bei der ebenen Helmert-Transformation kann unter bestimmten Voraussetzungen die Ausgleichung durch ein **Rechenverfahren** erfolgen, so dass man hierfür nicht die allgemeine Methodik der Ausgleichungsrechnung beherrschen muss. Diese Voraussetzungen richten sich an die Struktur der Koordinatengewichte, die wir hier nicht näher betrachten. Diese sind mindestens dann gegeben, wenn Gleichgewichtigkeit besteht, d.h. die Koordinaten identischer Punkte als gleich genau einzustufen sind. Wir beschränken uns hier auf diesen häufig anzunehmenden Fall.

Das Rechenverfahren besteht aus folgenden Rechenschritten:

1. **Zentrierung** aller Koordinaten, so dass die Koordinatenursprünge beider Systeme in die Schwerpunkte der identischen Punkte mit den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix}$$

(kleine Buchstaben: Startsystem, große Buchstaben: Zielsystem) verschoben werden, analog zur ebenen Helmert-Transformation.

2. Aus den zentrierten Koordinaten identischer Punkte  $x_i, y_i, z_i, X_i, Y_i, Z_i, i = 1, \dots, n$  werden zwei **Matrizen**  $A, B$  wie folgt aufgebaut:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{pmatrix}$$

3. Es wird berechnet:  $U \cdot S \cdot V^T = \text{svd}(A^T \cdot B)$ . Hier bedeutet „svd“ die sogenannte **Singulärwertzerlegung**. Das ist eine spezielle Zerlegung einer beliebigen Matrix in ein Produkt aus drei Faktoren  $U, S, V^T$ , auf die wir hier nicht näher eingehen. Der Anwender sollte eine numerische Funktionsbibliothek verwenden, in der diese Zerlegungen implementiert ist. Der Name der Funktion ist meist „svd“ (singular value decomposition).
4. Nun berechnet man die **Rotationsmatrix**  $R = U^T V$ . Eine Probe ist, dass  $R$  die Eigenschaften einer Rotationsmatrix hat ( $R^T R = I, \det(R) = 1$ ). Falls der seltene Fall eintritt, dass  $\det(R) = -1$  gilt, sollten in der letzten Spalte von  $V$  alle Vorzeichen umgekehrt werden. Die Parameter der Rotation, z.B. die Eulerschen Winkel, müssen aus dieser Matrix abgelesen werden.
5. Weiter sind zu berechnen:  $a = \text{spur}(A^T A), b = \text{spur}(B^T B), c = \text{spur}(B^T A R)$ , wobei die „Spur“ einer Matrix gleich der Summe der Hauptdiagonalelemente ist.
6. Der **Maßstabsfaktor**  $m$  wird wie folgt erhalten:

$$m = \frac{b - a + \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2c}$$

7. Der **Translationsvektor**  $\vec{t}$  wird wie folgt erhalten:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} - m \cdot R^T \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix}$$

8. Die **Restklaffungen**  $W_{Xi}$ ,  $W_{Yi}$ ,  $W_{Zi}$  sind analog zur ebenen Transformation zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} W_{Xi} \\ W_{Yi} \\ W_{Zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} - \vec{t} - s \cdot R^T \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n$$

**Probe:** Die Summen der Restklaffungen jeder der drei Koordinaten muss Null ergeben.

**Beispiel 8:** Gegeben sind folgende geozentrischen Koordinaten von 7 identischen Punkten 1,...,7:

Pkt.- Nr.	Startsystem			Zielsystem		
	x [m]	y [m]	z [m]	X [m]	Y [m]	Z [m]
1	4157222,543	664789,307	4774952,099	4157870,237	664818,678	4775416,524
2	4149043,336	688836,443	4778632,188	4149691,049	688865,785	4779096,588
3	4172803,511	690340,078	4758129,701	4173451,354	690369,375	4758594,075
4	4177148,376	642997,635	4760764,800	4177796,064	643026,700	4761228,899
5	4137012,190	671808,029	4791128,215	4137659,549	671837,337	4791592,531
6	4146292,729	666952,887	4783859,856	4146940,228	666982,151	4784324,099
7	4138759,902	702670,738	4785552,196	4139407,506	702700,227	4786016,645

Die räumlichen Helmert-Transformation  $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$  soll berechnet werden.

**Lösung:** Wir veranschaulichen den Rechengang anhand von Zwischenergebnissen:

1. Zentrierung:

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4154040.3696 \\ 675485.0167 \\ 4776145.5793 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4154687.9981 \\ 675514.3218 \\ 4776609.9087 \end{pmatrix}$$

2. Aufbau der Matrizen aus zentrierten Koordinaten:

$$A = \begin{pmatrix} 3182.17342 & -10695.7097 & -1193.4803 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -15280.4676 & 27185.7213 & 9406.6167 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3182.2388 & -10695.6439 & -1193.38471 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -15280.4921 & 27185.9051 & 9406.73628 \end{pmatrix}$$

3. Singulärwertzerlegung (Die S-Matrix wird nicht benötigt.)

$$U = \begin{pmatrix} -0.58473622 & -0.49122720 & 0.64558452 \\ 0.70307282 & -0.70387658 & 0.10122427 \\ 0.40468771 & 0.51308243 & 0.75695064 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 3346571547 & 0 & 0 \\ 0 & 1493422629 & 0 \\ 0 & 0 & 6635,77112 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.58473459 & -0.49123281 & 0.64558172 \\ 0.70307368 & -0.70387670 & 0.10121749 \\ 0.40468858 & 0.51307689 & 0.75695392 \end{pmatrix}$$

4. Rotationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0.9999999999790 & -4.8146461 \cdot 10^{-6} & 4.3327360 \cdot 10^{-6} \\ 4.8146252 \cdot 10^{-6} & 0.9999999999767 & 4.8408741 \cdot 10^{-6} \\ -4.3327593 \cdot 10^{-6} & -4.8408533 \cdot 10^{-6} & 0.9999999999789 \end{pmatrix}$$

5.  $a = 4839973793$ ;  $b = 4840027832$ ;  $c = 4840000813$

6. Maßstabsfaktor  $m=1.00000558$

7. Translationsvektor  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 641.8804 \\ 68.6553 \\ 416.3981 \end{pmatrix}$


8. Restklaffungen: Die Summenprobe ist erfüllt.

	X[m]	Y[m]	Z[m]
1	0,0940	0,1351	0,1402
2	0,0588	-0,0497	0,0137
3	-0,0399	-0,0879	-0,0081
4	0,0202	-0,0220	-0,0874
5	-0,0919	0,0139	-0,0055
6	-0,0118	0,0065	-0,0546
7	-0,0294	0,0040	0,0017
Summe	0,0000✓	0,0000✓	0,0000✓

Wenn das gewünscht wird, könnte man z.B. die Eulerschen Winkel berechnen. Da die Matrix R nahezu die Einheitsmatrix ist, haben wir es mit einer inkrementellen Rotation zu tun für die man die Winkel direkt aus der Matrix abliest:

$$\varepsilon_1 \approx -4.84086 \mu\text{rad}, \quad \varepsilon_2 \approx 4.33274 \mu\text{rad}, \quad \varepsilon_3 \approx 4.81463 \mu\text{rad}$$

( $1\mu\text{rad} = 10^{-6}\text{rad}$ ,  $\text{rad} = \text{Radian}$ ).

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-beispiel08>

**Aufgabe 11:** Berechnen Sie das vorige Beispiel mit den Koordinaten

Pkt.- Nr.	Startsystem			Zielsystem		
	x [m]	y [m]	z [m]	X [m]	Y [m]	Z [m]
1	27,09	890,50	962,14	261,02	-267,86	1349,45
2	734,21	663,93	147,86	-640,53	-116,09	734,31
3	985,49	510,32	204,79	-806,86	131,08	769,03
4	789,50	177,44	211,35	-554,97	338,74	562,44
5	641,41	541,27	850,20	-251,30	218,77	1237,54
6	151,53	436,96	575,45	98,78	14,48	835,03
7	153,36	149,80	783,43	244,44	336,01	868,30

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-aufgabe11>

## 4.7 DIE SECHS-PARAMETER-TRANSFORMATION

Wenn zwischen den beiden Systemen kein Maßstabsunterschied besteht oder dieser bekannt ist, muss man auch keine Skalierung im Transformationsmodell vorsehen. Somit bleibt noch die Rotation und die Translation. Dieses Transformationsmodell hat sechs Parameter, z.B.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t_1, t_2, t_3$$

Es wird allerdings seltener benutzt, weil es im Gegensatz zur Helmert-Transformation kein einfaches Rechenverfahren gibt. Es könnte vermutet werden, dass dieses Transformationsmodell schon bei zwei identischen Punkten eine Lösung liefert. Aber das ist nicht der Fall, denn die Rotation um die Gerade durch diese beiden Punkte bleibt unbestimmt. Also erfordert es ebenso wie die räumliche Helmert-Transformation mindestens drei identische Punkte, und diese dürfen ebenso nicht auf einer Geraden liegen.

Zur Berechnung dieser Transformationsparameter aus identischen Punkten ist es nötig, die Methodik der Ausgleichsrechnung zu beherrschen.

## 4.8 DIE RÄUMLICHE AFFIN-TRANSFORMATION

Ein sehr einfach berechenbares räumliches Transformationsmodell folgt der Transformationsgleichung

$$\vec{v} = \vec{t} + T \cdot \vec{V}$$

wobei  $T$  eine beliebige  $3 \cdot 3$ -Matrix ist. Wir nennen es „Räumliche Affintransformation“. Es ist das allgemeinste Modell, welches Geraden stets in Geraden transformiert und Parallelen parallel lässt. Längen, Winkel und Volumina hingegen werden im Allgemeinen geändert.

Die räumliche Affintransformation hat 12 Parameter, das können z.B. die Elemente der Matrix  $T$  und des Vektors  $\vec{t}$  sein:

$$t_{11}, t_{12}, \dots, t_{33}, t_1, t_2, t_3$$

Zur Bestimmung der 12 Parameter benötigt man mindestens vier identische Punkte, die nicht in einer Ebene liegen dürfen. Bei genau vier identischen Punkten muss ein lineares Gleichungssystem mit 12 Gleichungen und 12 Unbekannten gelöst werden. Bei mehr als vier identischen Punkten haben wir eine Ausgleichungsaufgabe vorliegen. Prinzipiell könnte man auch hier wie bei der ebenen Affintransformation ein Rechenverfahren angeben, das aber sehr umständlich wäre. Leichter hat man es hier, wenn Kenntnisse der Ausgleichsrechnung vorliegen, die wir an dieser Stelle aber nicht voraussetzen.

**Aufgabe 12:** Bestimmen Sie die Parameter  $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{33}, t_1, t_2, t_3$  der Affintransformation aus den identischen Punkten 1,2,3,4 der Aufgabe 11.

 <http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?raum-aufgabe12>

Die Parameter  $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{33}$  sind leider nicht geometrisch anschaulich. Alternativ denken wir uns diese Transformation zerlegt in folgende Schritte:

Transvektion, drei Skalierungen, Rotation, Translation

$$\vec{v} = \vec{t} + R \cdot M \cdot S \cdot \vec{V}$$

Mögliche Parameter wären dann

$$f_1, f_2, f_3, m_1, m_2, m_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t_1, t_2, t_3$$

Die Zerlegung von  $T$  in  $R \cdot M \cdot S$  vollziehen wir durch eine sogenannte **QR-Zerlegung**, der wir uns aber nicht näher widmen wollen. Aus den Matrixfaktoren  $R, M, S$  gewinnen wir dann die Parameter  $f_1, f_2, f_3, m_1, m_2, m_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

## 4.9 ANWENDUNG: ZYLINDER DURCH SIEBEN PUNKTE

Auf einem schräg im Raum liegenden geraden Kreiszyylinder wurden tachymetrisch 7 Punkte gemessen ( $\nearrow$  Abbildung 3),

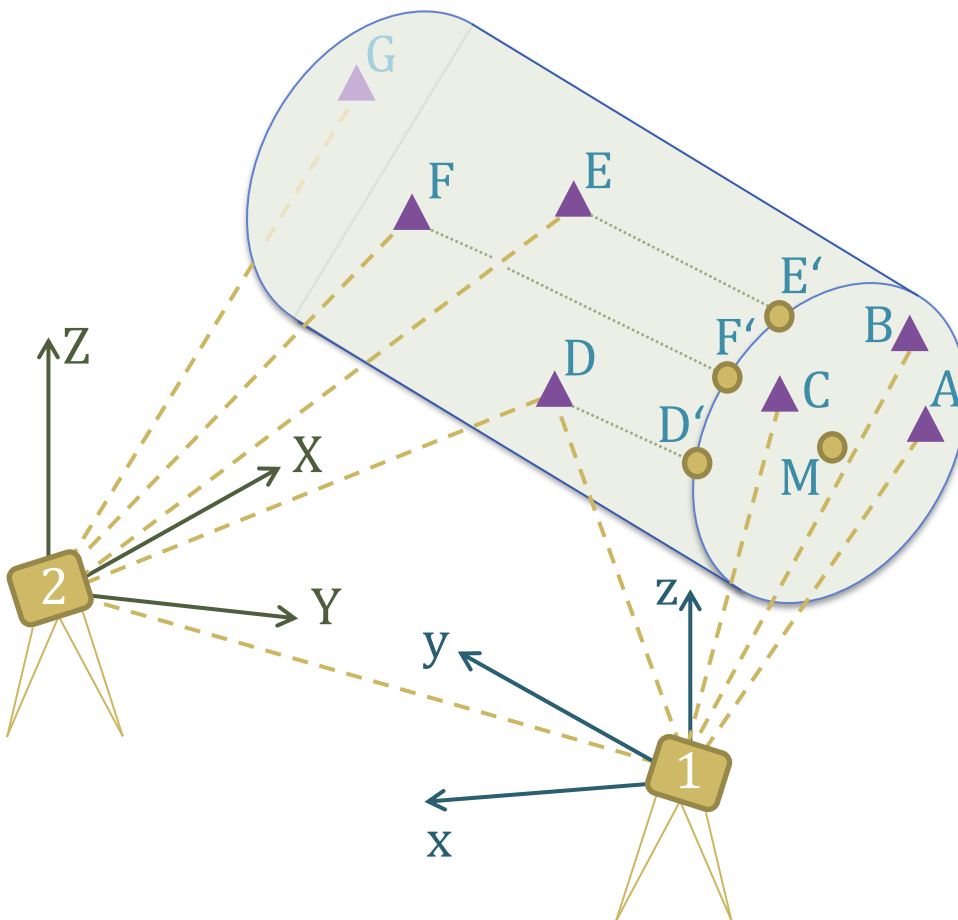
- drei Punkte A,B,C auf der Grundfläche,
- drei Punkte D,E,F auf der Mantelfläche



- und ein Punkt G auf der Deckfläche.

Die vier Punkte A,B,C,D wurden vom Standpunkt 1 gemessen, haben also kartesische Koordinaten  $x, y, z$  im Standpunktsystem von 1. Die vier Punkte D,E,F,G wurden vom Standpunkt 2 gemessen, haben also kartesische Koordinaten  $X, Y, Z$  im Standpunktsystem von 2. Außerdem erfolgte je eine gegenseitige Messung zwischen 1 und 2, so dass beide Punkte Koordinaten im jeweils anderen Standpunktsystem haben.

Die Abmessungen des Zylinders sollen berechnet werden.



**Abbildung 3:** Zylinder durch sieben Punkte A,B,C,D,E,F,G

Zuerst müssen die Standpunktsysteme 1 und 2 zusammengefügt werden. Das geschieht mittels einer Koordinatentransformation von einem in das andere Standpunktsystem über die drei identischen Punkte D,1,2.

Können die vertikalen Achsen  $z, Z$  als parallel angesehen werden (Stehachsen), ist zunächst eine ebene Transformation  $(x, y) \rightarrow (X, Y)$  über die drei identischen Punkte D,1,2 sinnvoll. Können die Maßstäbe als gleich angesehen werden, ist eine Transformation mit festem Maßstab  $m = 1$  geeignet, andernfalls eine ebene Helmert-Transformation. Da mehr als die mindestens nötige Anzahl von identischen Punkten zur Verfügung steht, erfolgt eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten (↗ Manuskript „Ebene Geodätische Berechnungen“, Abschnitt 6.9). Danach muss noch der Unterschied

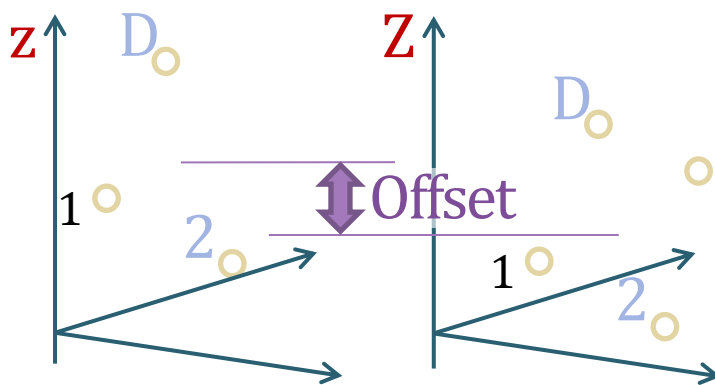
der Nullpunkte der z-Achsen ausgeglichen werden (vertikaler Offset-Ausgleich, ↗ Abbildung 4). Diesen Offset berechnet man dreimal über

$$Z_D - z_D, Z_1 - z_1, Z_2 - z_2$$

und mittelt diese Werte arithmetisch, sollten sie nahezu gleich sein. Andernfalls liegt ein Irrtum oder grober Fehler vor.

Sind die vertikalen Achsen  $z, Z$  nicht als parallel vorauszusetzen, berechnet man eine räumliche Transformation über die drei identischen Punkte  $D, 1, 2$  mit sieben Parametern (räumliche Helmert-Transformation) oder mit sechs Parametern, je nach Maßstab.

Die Transformation mit den erhaltenen Transformationsparameters wird auf die Neupunkte angewendet. Nun hat man alle Punkte  $A, B, C, D, E, F$  in einem einheitlichen kartesischen Koordinatensystem vorliegen.



**Abbildung 4:** Offset-Ausgleich

Nun muss durch die Punkte  $A, B, C$  eine Ebene  $\mathcal{E}$  berechnet werden. Danach werden die Punkte  $D, E, F$  senkrecht auf  $\mathcal{E}$  projiziert (↗ Tabelle 2). Die projizierten Punkte sind  $D', E', F'$ .

Eine Möglichkeit, eine solche Projektion zu berechnen, ist mit einer Transformation gegeben:

1. Man legt ein räumliches Hilfskoordinatensystem  $(u, v, w)$  an, dessen  $uv$ -Ebene  $\mathcal{E}$  ist, und zwar dadurch, dass  $w_A = w_B = w_C = 0$  gewählt wird. Die anderen sechs Koordinaten von  $A, B, C$  ergeben sich irgendwie aus den Abmessungen des Dreiecks  $ABC$ .
2. Nun transformiert man räumlich über die identischen Punkte  $A, B, C$  auch  $D, E, F$  in dieses Hilfskoordinatensystem. Wurden die Koordinaten von  $A, B, C$  korrekt festgelegt, ergeben sich dabei keine Restklaffungen, und alle möglichen Transformationen liefern dasselbe Ergebnis.

3. Die projizierten Punkte erhält man durch Nullsetzen der  $w$ -Koordinaten:  $w_{D'} = w_{E'} = w_{F'} = 0$ .
4. Nun transformiert man  $D', E', F'$  durch die zugehörige Rückwärtstransformation zurück ins Startsystem.
5. **Probe:** Man überprüft, ob  $D', E', F'$  die Ebenengleichung von  $\mathcal{E}$  erfüllen.

Durch die Punkte  $D', E', F'$  muss nun ein Kreis konstruiert werden, der Grundkreis des Zylinders. Für diese Aufgabe hatten wir zwei Lösungen vorgeschlagen (↗ Manuskript „Ebene Geodätische Berechnungen“ Abschnitt 5.4). Diese arbeiten allerdings mit ebenen Koordinaten der Peripheriepunkte  $D', E', F'$  in der Ebene  $\mathcal{E}$ , so dass wir dafür die Koordinaten  $u, v$  im Hilfskoordinatensystem verwenden müssen. Den Mittelpunkt des Kreises  $M$  erhalten wir dann ebenso im System  $(u, v)$  und wenden darauf genauso die o.g. Rücktransformation an.

**Probe:** Man überprüft, ob  $M$  die Ebenengleichung von  $\mathcal{E}$  erfüllt und die Abstände  $MD', ME'$  und  $MF'$  alle gleich dem zuvor ermittelten Radius sind.

Die Höhe des Zylinders berechnet man aus dem Abstand von  $G$  und  $\mathcal{E}$ , d.h.  $\text{Abstand}(G, \mathcal{E})$ .

Eine weitere Problemöglichkeit gesteht darin, dieselbe Rechnung auch im anderen Koordinatensystem zu vollziehen.

**Beispiel 9:** Gegeben sind folgende kartesische Linkssystemkoordinaten der Punkte aus Abbildung 3:

	Standpunktsystem 1				Standpunktsystem 2		
Punkt	X [m]	Y [m]	Z [m]	Punkt	X [m]	Y [m]	Z [m]
A	97,9956	104,3552	100,4078	D	100,0340	94,0688	98,1404
B	97,5320	104,0954	99,9750	E	100,2136	94,0175	100,1969
C	97,3763	103,6547	99,9532	F	101,6807	93,6294	101,5988
D	94,8114	102,9784	101,5434	G	102,7254	94,7662	100,9177
1	100,0000	100,0000	100,0000	1	95,3885	90,3071	96,5990
2	89,2987	100,8107	103,4009	2	100,0000	100,0000	100,0000

Gesucht sind die Abmessungen des Zylinders.

**Lösung:** Die räumliche Helmert-Transformation Standpunktsystem 1  $\rightarrow$  2 ergibt folgende 7 Parameter:

$$\varepsilon_1 = 0,0021 \text{ gon}, \quad \varepsilon_2 = -0,0038 \text{ gon}, \quad \varepsilon_3 = -123,4699 \text{ gon}, \quad m = 1.00018559$$

$$t_1 = 38.132993 \quad t_2 = 219.64063 \quad t_3 = -3.4294497$$

Man erkennt daran, dass im Wesentlichen eine Rotation um die Z-Achse nötig ist, um die Systeme zusammenzuführen, die Stehachsen der beiden Standpunkte sind fast parallel ausgerichtet. Die Restklaffungsbeträge übersteigen nicht 4,2 mm.

Im Standpunktsystem 2 erhalten wir durch Anwendung der Transformation folgende Neupunktkoordinaten:

Standpunktsystem 2			
Punkt	X [m]	Y [m]	Z [m]
A	100,1725	90,6058	97,0062
B	100,0972	91,1319	96,5733
C	99,7421	91,4360	96,5515

Durch diese drei Punkte ergibt sich eine Ebene mit folgender Ebenengleichung:

$$0,12017591 \cdot X + 0,15208125 \cdot Y + 0,16391938 \cdot Z = 41,71896$$

Zur Projektion wenden wir die Transformationsmethode an: Das Dreieck ABC hat folgende Seitenlängen: AB=0,685459, BC=0,468026, AC=1,039821. Dieses Dreieck hat auf AB die Höhe HC=0,370339 und den Seitenabschnitt AH=0,971636. Somit gewinnen wir folgende Koordinaten im Hilfskoordinatensystem ( $u, v, w$ )

Hilfskoordinatensystem			
Punkt	u [m]	v [m]	w [m]
A	0,000000	0,000000	0,000000
B	0,685459	0,000000	0,000000
C	0,971636	0,370339	0,000000

Nun transformieren wir die restlichen Punkte vom Standpunktsystem 2 in dieses Hilfskoordinatensystem ( $u, v, w$ ), am einfachsten mit einer räumlichen Helmert-Transformation. Das ergibt folgende 7 Parameter:

$$\varepsilon_1 = 47,6162 \text{ gon}, \quad \varepsilon_2 = -31,3954 \text{ gon}, \quad \varepsilon_3 = -107,9602 \text{ gon}, \quad m = 0,9999999$$

$$t_1 = 2,7270 \text{ m}, \quad t_2 = 25,2536 \text{ m}, \quad t_3 = -164,3440 \text{ m}$$

**Probe:** Der Maßstab ist nahezu 1.000000. Restklaffungsbeträge liegen im Bereich der Rundungsfehler.

Hilfskoordinatensystem			
Punkt	u [m]	v [m]	w [m]
D	1,95682	1,3975	2,7415
E	0,59893	2,1114	4,1237

F	-0,74547	1,3424	5,4910
G	0,44242	0,3963	6,2268

Hieraus liest man direkt die Höhe des Zylinders ab:  $w_G = 6,23$  m. Durch die Punkte D', E', F' in der  $(u, v)$ -Ebene mit denselben Hilfskoordinaten  $u, v$  wie D,E,F berechnet man einen Kreis mit dem Mittelpunkt M( $u_M = 0,6232$  m,  $v_M = 0,5093$  m) und dem Radius 1,602 m.

## 5 LÖSUNGEN



Zwischenergebnisse wurden sinnvoll gerundet, so können unbedeutende Abweichungen zur exakten Lösung entstehen.

**Aufgabe 1:** 14,761 m und -3,495 gon

**Aufgabe 2:** M(98,15 m; 100,28 m; 115,32 m) und  $r = 20,18$  m; Z(98,15 m; 100,28 m; 135,50 m); tSZ = 190,34 gon; vSZ = 3,35 gon; sSZ = 35,55 m

**Aufgabe 3:** N(541,61 m; 201,79 m; 717,68 m)

**Aufgabe 11:**

$$\varepsilon_1 = 33,813 \text{ gon}, \quad \varepsilon_2 = -16,0116 \text{ gon}, \quad \varepsilon_3 = 174,122 \text{ gon}, \quad m = 0,9999306$$

$$t_1 = 103,301 \text{ m}, \quad t_2 = 105,391 \text{ m}, \quad t_3 = 102,450 \text{ m}$$

**Aufgabe 12:**

$$\begin{array}{llll} t_{11} = -0,8895 & t_{12} = -0,2251 & t_{13} = 0,3973 & t_1 = 103,314 \\ t_{21} = 0,3829 & t_{22} = -0,8418 & t_{13} = 0,3803 & t_2 = 105,425 \\ t_{31} = 0,2488 & t_{32} = 0,4905 & t_{13} = 0,8350 & t_3 = 102,433 \end{array}$$